

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐIỆN BIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN**

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN**

**Tác giả: Nguyễn Thị Thanh Phương
Đơn vị công tác: Tổ Toán –Tin**

Điện Biên, tháng 4 năm 2015

MỤC LỤC

	Trang
A. Sự cần thiết, mục đích của việc thực hiện sáng kiến:	3
B. Phạm vi triển khai thực hiện:	4
C. Nội dung	4
1. Tình trạng giải pháp đã biết	4
2. Nội dung giải pháp:	5
3. Khả năng áp dụng của giải pháp	5
4. Hiệu quả, lợi ích thu được do áp dụng giải pháp	5
5. Phạm vi ảnh hưởng của giải pháp	6
6. Kiến nghị, đề xuất:	6
7. Nội dung cụ thể	6
7.1 Cơ sở lý luận	6
7.2 Vận dụng	7
7.2.1 Ứng dụng tích phân tính diện tích của hình phẳng	7
7.2.2 Ứng dụng tích phân tính thể tích của vật thể tròn xoay	24
Tài liệu tham khảo	31

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

Tác giả: Nguyễn Thị Thanh Phương
Giáo viên THPT chuyên Lê Quý Đôn

A. Sự cần thiết, mục đích của việc thực hiện sáng kiến:

Qua thực tế giảng dạy tôi thấy vấn đề diện tích của các hình phẳng, vấn đề thể tích của các vật thể tròn xoay ở chương trình giải tích 12 học sinh gặp rất nhiều khó khăn. Do bài toán ứng dụng của tích phân là bài toán liên quan đến thực tế, đặc biệt để giải quyết được bài toán này học sinh cần được trang bị nhiều kiến thức như tính tích phân, khảo sát và vẽ đồ thị, bài toán tương giao, hình học phẳng, hình học không gian. Nên nhiều học sinh thường có cảm giác “sợ” bài toán tính diện tích hình phẳng cũng như bài toán tính thể tích của vật thể tròn xoay. Khi học vấn đề này nhìn chung các em thường vận dụng công thức một cách máy móc chưa có sự phân tích, thiếu tư duy thực tế và trực quan nên các em hay bị nhầm lẫn, học không giải được, đặc biệt là những bài toán cần phải có hình vẽ để “chia nhỏ” diện tích mới tính được. Thêm vào đó trong sách giáo khoa cũng như các sách tham khảo có rất ít ví dụ minh họa một cách chi tiết để giúp học sinh học tập và khắc phục “những sai lầm đó”. Càng khó khăn hơn cho những học sinh có kỹ năng tính tích phân còn yếu và kỹ năng “đọc đồ thị” còn hạn chế.

Sáng kiến kinh nghiệm “PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN” nhằm giúp cho học sinh 12 biết cách giải quyết các bài toán tính diện tích hình phẳng, thể tích vật tròn xoay được đưa ra trong chương trình học. Rèn kỹ năng tính tích phân, đặc biệt là tích phân có chứa dấu giá trị tuyệt đối, rèn kỹ năng đọc đồ thị của hàm số, từ đó khắc phục những khó khăn, sai lầm khi gặp bài toán tính diện tích hình phẳng cũng như tính thể tích của vật thể tròn xoay. Giúp học sinh phát huy tốt kiến thức về diện tích và thể tích mà học sinh đã học ở lớp dưới, thấy được tính thực tế và sự liên hệ nội tại của vấn đề này trong chương, từ đó học sinh sẽ cảm thấy hứng thú, thiết thực và học tốt vấn đề ứng dụng của tích phân. Đây là một tài liệu tham khảo rất tốt cho học

sinh cũng như giáo viên để luyện thi và ôn tập thi tốt nghiệp trung học phổ thông, ôn thi đại học và cao đẳng.

B. Phạm vi triển khai thực hiện:

+) Đối tượng nghiên cứu:

- Mục tiêu, nội dung chương trình nâng cao và cơ bản THPT.
- Sách giáo khoa và sách bài tập đại số và giải tích 12.
- Các bài toán trong chương trình thi đại học.
- Mức độ nhận thức của học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.

+) Phạm vi nghiên cứu:

- Chương trình cơ bản và nâng cao toán THPT.
- Các chuyên đề thi đại học và cao đẳng.
- Học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.

+) Tiến hành thực nghiệm trên lớp: 12C8.

C. Nội dung

1. Tình trạng giải pháp đã biết

Chủ đề ứng dụng của tích phân là một trong những kiến thức cơ bản ở chương trình toán giải tích lớp 12. Việc dạy và học vấn đề này học sinh giúp học sinh hiểu rõ ý nghĩa hình học của tích phân, đặc biệt là tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số, tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo bởi khi quay một hình phẳng quanh trục hoành hoặc trục tung. Đây cũng là một nội dung thường gặp trong các đề thi định kỳ, đề thi tốt nghiệp trung học phổ thông, đề thi cao đẳng và đại học. Nhìn chung khi học vấn đề này, đại đa số học sinh (kể cả học sinh khá) thường gặp những khó khăn, sai lầm sau:

- Nếu không có hình vẽ thì học sinh thường không hình dung được hình phẳng (hay vật thể tròn xoay). Do đó học sinh có cảm giác “xa lạ” hơn so với khi học về diện tích của hình phẳng đã học trước đây (diện tích đa giác, thể tích các khối đa diện...). Học sinh không tận dụng được kiểu “tư duy liên hệ cũ với mới” vốn có của mình khi nghiên cứu vấn đề này.
- Hình vẽ minh họa ở các sách giáo khoa cũng như sách bài tập còn ít “chưa đủ” để giúp học sinh rèn luyện tư duy từ trực quan đến trừu tượng. Từ đó học sinh

chưa thấy sự gần gũi và thấy tính thực tế của các hình phẳng, vật tròn xoay đang học.

- Học sinh chưa thực sự hứng thú và có cảm giác nhẹ nhàng khi học vấn đề này, trái lại học sinh có cảm giác nặng nề, khó hiểu.

- Học sinh thường chỉ nhớ công thức tính diện tích hình phẳng, thể tích vật tròn xoay một cách máy móc, khó phát huy tính linh hoạt sáng tạo, đặc biệt là kỹ năng đọc đồ thị để xét dấu các biểu thức, kỹ năng “chia nhỏ” hình phẳng để tính, kỹ năng cộng, trừ diện tích; cộng, trừ thể tích. Đây là một khó khăn rất lớn mà học sinh thường gặp phải.

- Học sinh thường gặp sai sót trong việc tính tích phân có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. Nội dung giải pháp:

- Dùng một hệ thống ví dụ minh họa có phân tích kèm lời giải chi tiết với các cách khác nhau từ đó rèn luyện cho học sinh sự vận dụng linh hoạt trong quá trình giải toán, phát huy tính sáng tạo, giúp học có hình ảnh trực quan về các hình phẳng. Từ đó học sinh có cảm giác nhẹ nhàng, gần gũi thực tế hơn, hứng thú hơn trong học tập. Học sinh nhận dạng và giải thành thạo bài toán tính diện tích của hình phẳng, thể tích của vật thể tròn xoay theo yêu cầu.

- Giúp học thành thạo kỹ năng khử dấu giá trị tuyệt đối một cách linh hoạt tùy thuộc vào từng tình huống cụ thể.

- Đưa ra hệ thống bài tập tương tự có hình vẽ kèm theo hoặc không có hình vẽ để học sinh luyện tập từ dễ tới khó.

3. Khả năng áp dụng của giải pháp

Đề tài được triển khai nâng cao chất lượng học tập của học sinh lớp 12 trong quá trình học, trong ôn thi tốt nghiệp và ôn thi đại học, cao đẳng.

4. Hiệu quả, lợi ích thu được do áp dụng giải pháp

Qua thực tế áp dụng tôi nhận thấy các em học sinh đã tự tin và biết vận dụng một cách linh hoạt khi giải các bài toán ứng dụng của tích phân và tỏ ra hứng thú khi học về dạng toán này. Học sinh khắc phục được những “sai lầm” và khó khăn khi gặp bài toán tính diện tích của hình phẳng cũng như tính thể

tích của vật thể tròn xoay ở chương trình giải tích 12. Thuận lợi cho việc tăng cường tính trực quan, cũng đẩy mạnh ứng dụng công nghệ thông tin và dạy học.

5. Phạm vi ảnh hưởng của giải pháp

- Đề tài là tài liệu giảng dạy hữu ích cho các thầy cô đang giảng dạy toán lớp 12

- Đề tài là tài liệu giúp học sinh học tốt phần ứng dụng tích của tích phân, từ đó học sinh có phương pháp tự nghiên cứu các chuyên đề khác

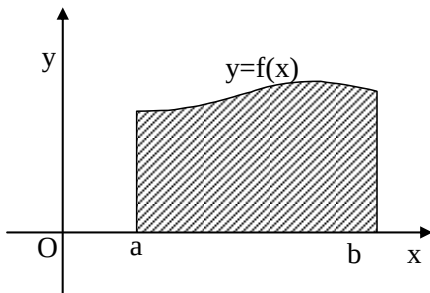
6. Kiến nghị, đề xuất:

Đề tài nên được nhân rộng trong các trường THPT trong tỉnh để góp phần nâng cao chất lượng dạy và học bộ môn Toán.

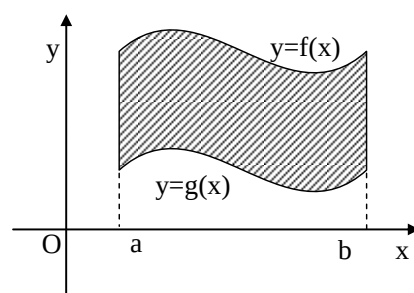
7. Nội dung cụ thể

7.1 Cơ sở lý luận

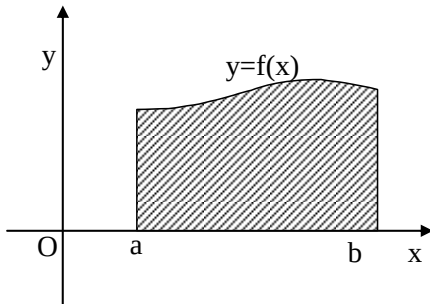
1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường trong đó có một đường $y=f(x)$

Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (trục Ox)} \\ x = a \\ x = b \text{ (} a < b \text{)} \end{cases}$ $\Rightarrow S = \int_a^b f(x) dx$	
---	--

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường trong đó có hai đường $y=f(x)$ $y=g(x)$

Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \text{ (} a < b \text{)} \end{cases}$ $\Rightarrow S = \int_a^b f(x) - g(x) dx$	
---	--

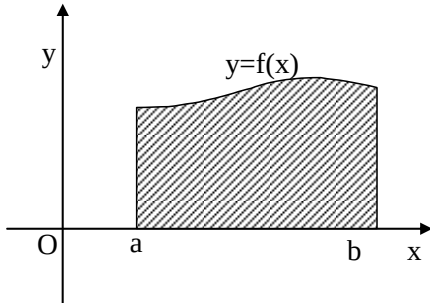
3. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi 4 đường trong đó có một đường $y=f(x)$ quay xung quanh trục Ox .

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi 4 đường: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (trục } Ox) \\ x = a \\ x = b \text{ (} a < b \text{)} \end{cases}$ Khối tròn xoay sinh bởi H khi quay quanh trục Ox là: $V_{Ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$	
---	--

7.2 Vận dụng

7.2.1 Ứng dụng tích phân tính diện tích của hình phẳng

1) Hình phẳng giới hạn bởi 4 đường trong đó có một đường $y=f(x)$

Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (trục } Ox) \\ x = a \\ x = b \text{ (} a < b \text{)} \end{cases}$ $\Rightarrow S = \int_a^b f(x) dx$	
--	---

Chú ý:

1. Cần phải xác định hình phẳng với đầy đủ 4 đường như trên rồi mới áp dụng công thức diện tích

2. Việc tính tích phân $S = \int_a^b |f(x)| dx$ (1) có dấu gttđ ta sử dụng một trong 3

cách tính sau đây

Cách 1: Xét dấu $f(x)$ và sử dụng định nghĩa

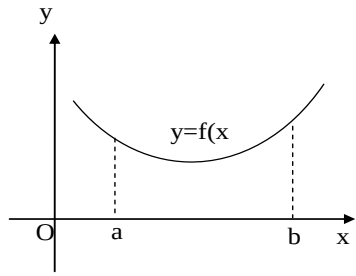
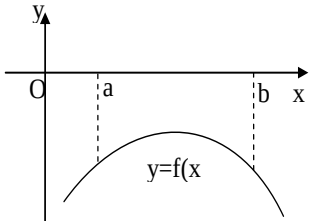
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$$

• Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$

• Nếu $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b (-f(x)) dx$

Từ đó tính tích phân trên mỗi đoạn mà $f(x)$ không còn dấu giá trị tuyệt đối
 Khi xét dấu $f(x)$ ta thường dùng định lí “dấu của nhị thức bậc nhất”, định lí “dấu của tam thức bậc hai”

Cách 2: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ để suy ra dấu của $f(x)$

Nếu trên đoạn $[a; b]$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía “trên” trục hoành thì $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$	
Nếu trên đoạn $[a; b]$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía “dưới” trục hoành thì $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$	

Cách 3: Chuyển dấu giá trị tuyệt đối ra ngoài dấu tích phân

Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì ta có : $S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| (*)$

Vấn đề là ta đi tìm các khoảng mà trên đó $f(x)$ không đổi dấu

Ta có nhận xét sau đây: Nếu phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_k$ thuộc $(a; b)$ thì trên mỗi khoảng $(a; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_k; b)$ biểu thức $f(x)$ có dấu không đổi.

Khi đó để tính tích phân $S = \int_a^b |f(x)| dx$ ta có thể tính như sau

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_k}^b |f(x)| dx \\
 &= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_k}^b f(x) dx \right|
 \end{aligned}$$

Các bước tính $S = \int_a^b |f(x)| dx$

- + Giải phương trình $f(x)=0$. Tìm **các nghiệm thuộc đoạn tính tích phân**
- + Chia đoạn tính tích phân nếu trên đoạn tính tích phân có chứa các nghiệm
- + Vận dụng (*) thực hiện đưa dấu giá trị tuyệt đối (gttd) ra ngoài và tính tích phân bình thường

Ví dụ 1: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $\begin{cases} y = -x^2 + 2x - 2 (C) \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Bài giải

Cách 1: (Xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối)

Ta có diện tích S của hình phẳng trên là $S = \int_0^3 |-x^2 + 2x - 2| dx$

Giải phương trình $-x^2 + 2x - 2 = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow -x^2 + 2x - 2 < 0 \forall x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \int_0^3 |-x^2 + 2x - 2| dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \Big|_0^3 \\ &= \frac{3^3}{3} - 3^2 + 2.3 - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 - 2.0 \right] = \frac{27}{3} - 9 + 6 - 0 = 6 \text{ (đvdt)} \end{aligned}$$

Cách 2: (Dùng đồ thị)

Diện tích S của hình phẳng trên là

$$S = \int_0^3 |-x^2 + 2x - 2| dx$$

Từ đồ thị ta có trên $[0; 3]$ đồ thị (C) nằm dưới trục hoành nên $-x^2 + 2x - 2 \leq 0, \forall x \in [0; 3]$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 |-x^2 + 2x - 2| dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \Big|_0^3 \\ &= \frac{3^3}{3} - 3^2 + 2.3 - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 - 2.0 \right] = \frac{27}{3} - 9 + 6 - 0 = 6 \end{aligned}$$

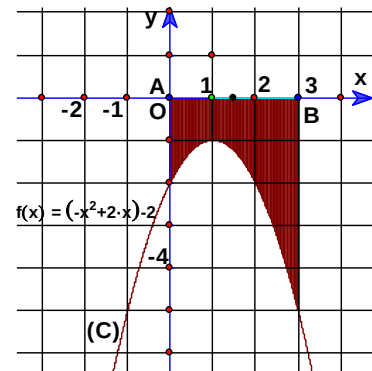
(đvdt)

Cách 3: (đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân)

Ta có diện tích S của hình phẳng trên là $S = \int_0^3 |-x^2 + 2x - 2| dx$

Giải phương trình $-x^2 + 2x - 2 = 0$ vô nghiệm trên đoạn $(0; 3)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \int_0^3 |-x^2 + 2x - 2| dx = \left| \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \Big|_0^3 \right| \\ &= \left| \frac{3^3}{3} - 3^2 + 2.3 - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 - 2.0 \right] \right| = \left| \frac{27}{3} - 9 + 6 - 0 \right| = 6 \text{ (đvdt)} \end{aligned}$$



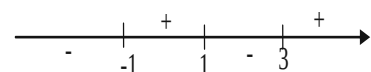
Ví dụ 2: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 4 đường
$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 2 \text{ (C)} \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài giải

Cách 1: (Xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối)

Ta có diện tích hình phẳng $S = \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2| dx$

Dấu của $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là



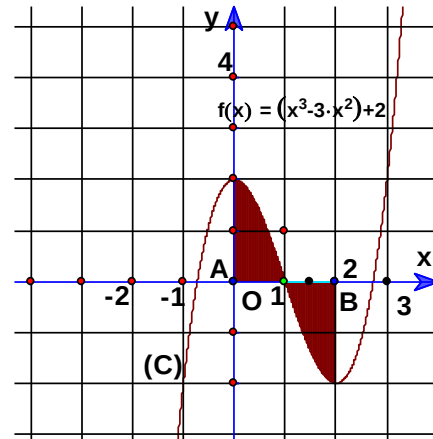
Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1]$
 và $x^3 - 3x^2 + 2 \leq 0 \quad \forall x \in [1; 2]$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } S &= \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2| dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{4} - 1 + 2 - 0 - \left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2 \cdot 2 - \left(\frac{1}{4} - 1 + 2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} + 1 - 4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 2 = \frac{5}{2} \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$

Cách 2: (dùng đồ thị)

Từ đồ thị của hàm số đã cho trên đoạn từ $[0; 2]$ ta có trên $[0; 1]$ (C) nằm trên trục hoành, trên $[1; 2]$ (C) nằm dưới trục hoành

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2| dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx \\ &= \frac{1}{4} + 1 - 4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 2 = \frac{5}{2} \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$



Cách 3: (đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân)

$$S = \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2| dx$$

$$\text{Giải phương trình } x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \in (0; 2) & (t/m) \\ x=2 \notin (0; 2) & (Loai) \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2| dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2) dx + \int_1^2 -(x^3 - 3x^2 + 2) dx = \left| \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right) \Big|_0^1 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right) \Big|_1^2 \right| = \left| \frac{5}{4} \right| + \left| -\frac{5}{4} \right| = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$

Chú ý: Việc chia đoạn tính tích phân được thực hiện khi phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm thuộc khoảng lấy tích phân.

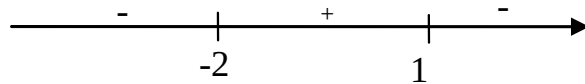
Ví dụ 3: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 4 đường:
$$\begin{cases} y = \frac{-x-2}{x-1} \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bài giải

Cách 1: (Xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối)

$$\text{Có } S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx$$

Dấu của $y = \frac{-x-2}{x-1}$ là



Suy ra $\frac{-x-2}{x-1} \geq 0, \forall x \in [-1; 0]$

Diện tích S của hình phẳng trên là

$$S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx = S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{-x-2}{x-1} \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{-(x-1)-3}{x-1} \right) dx = \int_{-1}^0 \left(-1 - \frac{3}{x-1} \right) dx$$

$$= \left(-x - 3\ln|x-1| \right) \Big|_{-1}^0 = (-0 - 3\ln 1) - (-1 - 3\ln 2)$$

$$= -0 - 3\ln 1 - 1 + 3\ln 2 = 3\ln 2 - 1$$

Cách 2: (Dùng đồ thị)

Diện tích S của hình phẳng trên là $S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx$

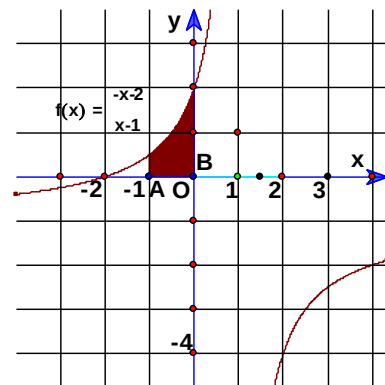
Từ đồ thị của hàm số suy ra

$$\frac{-x-2}{x-1} \geq 0, \forall x \in [-1; 0]$$

$$S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{-x-2}{x-1} \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{-(x-1)-3}{x-1} \right) dx = \int_{-1}^0 \left(-1 - \frac{3}{x-1} \right) dx$$

$$= \left(-x - 3\ln|x-1| \right) \Big|_{-1}^0 = (-0 - 3\ln 1) - (-1 - 3\ln 2)$$

$$= -0 - 3\ln 1 - 1 + 3\ln 2 = 3\ln 2 - 1$$



Cách 3: (đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân)

$$S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx$$

Giải phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-x-2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \notin (-1; 0)$ (loại)

Ta có diện tích S của hình phẳng trên là

$$S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx = \left| \int_{-1}^0 \frac{-x-2}{x-1} dx \right| = |3\ln 2 - 1| = 3\ln 2 - 1$$

Nhận xét: Khi tính diện tích ta cần thực hiện linh hoạt

- + Nếu việc xét dấu của hàm số đơn giản thì ta dùng phương pháp xét dấu
- + Nếu hàm số đã có đồ thị thì ta dùng phương pháp đồ thị
- + Nếu xét dấu khó khăn và hàm số chưa được vẽ đồ thị thì ta dùng phương pháp đưa dấu giá trị tuyệt đối ra ngoài dấu tích phân

Ví dụ 4: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$.

Bài giải : Dùng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

Diện tích S của hình phẳng trên là $S = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x^3| dx$

Giải phương trình $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-1; \frac{3}{2})$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x^3| dx = \int_{-1}^0 |x^3| dx + \int_0^{\frac{3}{2}} |x^3| dx = \int_{-1}^0 -x^3 dx + \int_0^{\frac{3}{2}} x^3 dx = \left(-\frac{x^4}{4}\right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} \\ &= -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) + \left(\frac{(\frac{3}{2})^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = -(0 - \frac{1}{4}) + \frac{81}{64} - 0 = \frac{1}{4} + \frac{81}{64} = \frac{97}{64} \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$

Chú ý: Đối với các hình phẳng cho ở dạng

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (trục Ox)} \\ x = a \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \text{ (trục Ox)} \end{cases} \quad \text{chưa đủ 4 đường thì ta cần phải xác}$$

định các đường còn lại bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ với các nghiệm được lấy từ bé nhất đến lớn nhất

Ví dụ 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 2x$ và trục hoành

Bài giải: Dùng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

Ta tìm các đường còn thiếu bằng cách giải phương trình $x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy diện tích hình phẳng

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx \quad (\text{lấy cận từ bé nhất đến lớn nhất}) \\ S &= \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx \\ S &= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$.

Bài giải: Dùng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

Ta tìm các đường còn thiếu bằng cách giải phương trình: $x \ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 1 \end{cases}$

Diện tích S cần tìm là $S = \int_1^e |x \ln x| dx = \left| \int_1^e x \ln x dx \right|$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } S = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4} \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$

Bài giải: Dùng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

$$\text{Ta giải phương trình: } x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Các nghiệm $x=0, x=2$ thuộc $(-2;4)$ do vậy diện tích hình phẳng

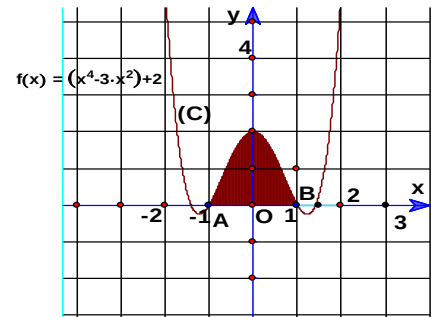
$$S = \int_{-2}^4 |x^3 - 4x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx + \int_2^4 |x^3 - 4x| dx$$

$$\Rightarrow S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 4x) dx \right| = 44 \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 8:

Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C).
(Hình bên)

Hãy tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành, và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.



Bài giải : Dùng phương pháp đồ thị

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng

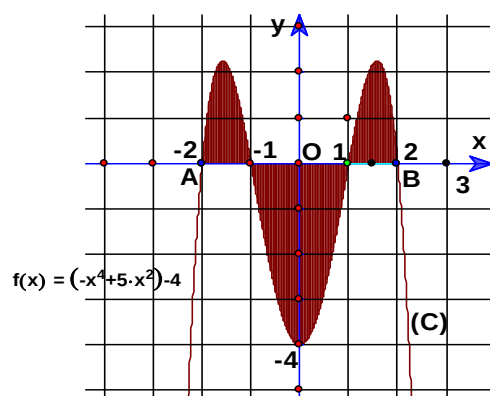
$x = -1$ và $x = 1$ được tính bởi công thức :

$$S = \int_{-1}^1 |x^4 - 3x^2 + 2| dx$$

Dựa vào đồ thị ta thấy (C) nằm trên trục hoành trên $[-1;1]$ suy ra $x^4 - 3x^2 + 2 \geq 0 \quad \forall x \in [-1; 1]$

$$\text{Do đó } S = \int_{-1}^1 |x^4 - 3x^2 + 2| dx = \int_{-1}^1 (x^4 - 3x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{12}{5} \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 4$ có đồ thị (C) (Hình bên). Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành



Bài giải

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm có tọa độ lần lượt là

$(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$, $(2;0)$.

Suy ra hình phẳng đã cho được giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng

$x = -2$ và $x = 2$.

Vậy diện tích S của hình phẳng là

$$S = \int_{-2}^2 |x^4 - 3x^2 + 2| dx$$

Dựa vào đồ thị ta thấy (C) nằm trên trục hoành với $\forall x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$, (C) nằm dưới trục hoành với $\forall x \in [-1; 1]$

Do đó $-x^4 + 5x^2 - 4 \geq 0 \quad \forall x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$

$-x^4 + 5x^2 - 4 \leq 0 \quad \forall x \in [-1; 1]$

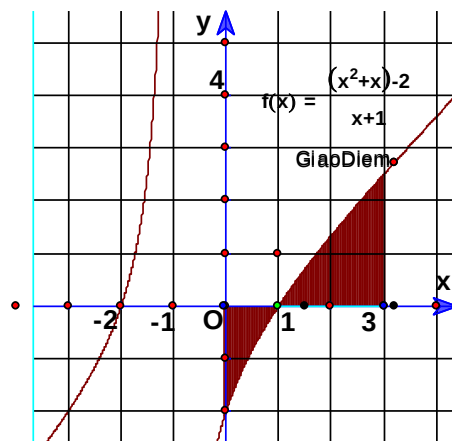
$$\Rightarrow S = \int_{-2}^2 |-x^4 + 5x^2 - 4| dx = \int_{-2}^{-1} (-x^4 + 5x^2 - 4) dx + \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx + \int_1^2 (-x^4 + 5x^2 - 4) dx$$

$$S = \frac{22}{15} + \frac{76}{15} + \frac{22}{15} = 8 \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 10:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$ có đồ thị (C).

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$.



Bài giải:

Ta có đồ thị (C) cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ lần lượt là $(-2;0)$ và $(1;0)$

Diện tích S cần tìm là

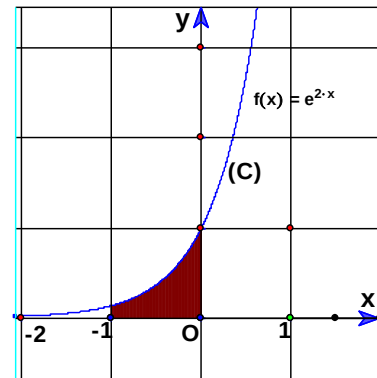
$$S = \int_0^3 \left| \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \right| dx = \left| \int_0^1 \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} dx \right| + \int_1^3 \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} dx$$

$$= \left| \int_0^1 \left(x - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| + \int_1^3 \left(x - \frac{2}{x+1} \right) dx = \left| \left(\frac{x^2}{2} - 2 \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 \right| + \left(\frac{x^2}{2} - 2 \ln|x+1| \right) \Big|_1^3$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \ln 2 + \frac{9}{2} - 2 \ln 4 - \frac{1}{2} + 2 \ln 2 = \frac{9}{2} - 4 \ln 2 \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 11:

Tính diện tích phần hình phẳng được tô màu ở hình bên. Biết đồ thị (C) là đồ thị của hàm số $y = e^{2x}$.



Bài giải : (Dùng phương pháp đồ thị)

Hình phẳng trên được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x}$, trục hoành $y = 0$, trục tung $x = 0$ và đường thẳng $x = -1$.

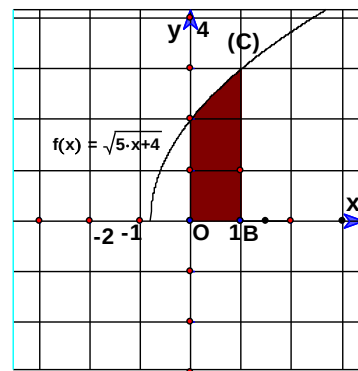
Trên đoạn $[-1;0]$ đồ thị nằm trên trục hoành nên $e^{2x} > 0 \quad x \in [-1;0]$

Vậy diện tích S của hình phẳng đã cho là :

$$S = \int_{-1}^0 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} (e^0 - e^{-2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{e^2}) \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 12

Tính diện tích phần hình phẳng được tô màu biết rằng đồ thị (C) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{5x+4}$



Bài giải

Hình phẳng trên được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{5x+4}$, trục hoành, và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

Vì trên $[0;1]$ đồ thị nằm trên trục hoành nên $y = \sqrt{5x+4} \geq 0$ với mọi $x \in [0;1]$

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng } S = \int_0^1 \sqrt{5x+4} dx = \int_0^1 \sqrt{5x+4} dx.$$

$$\text{Đặt } u = 5x + 4 \Rightarrow du = 5dx$$

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow u = 4$$

$$\text{Khi } x = 1 \Rightarrow u = 9$$

$$\text{Do đó } S = \frac{1}{5} \int_4^9 \sqrt{u} du = \frac{1}{5} \int_4^9 u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 = \frac{2}{15} \sqrt{u^3} \Big|_4^9 = \frac{2}{15} (\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{2}{15} (27 - 8) = \frac{38}{15} \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 13:

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x^2 - 3x + 2|$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 3$

Bài giải

Ta có $S = \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$

Ta giải phương trình $|x^2 - 3x + 2| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

$$S = \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx$$

$$S = \left| \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx \right|$$

$$= \left| \frac{5}{6} \right| + \left| \frac{-1}{6} \right| + \left| \frac{5}{6} \right| = \frac{11}{6} \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 14: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{|x+2|}{x-1}$, trục hoành, và hai đường thẳng $x = -4$, $x = 0$.

Bài giải :

Diện tích S cần tìm là $S = \int_{-4}^0 \left| \frac{x+2}{x-1} \right| dx$

Ta giải phương trình $\frac{|x+2|}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$$S = \int_{-4}^0 \left| \frac{x+2}{x-1} \right| dx = \int_{-4}^{-2} \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx + \int_{-2}^0 \left| \frac{x+2}{x-1} \right| dx = \left| \int_{-4}^{-2} \frac{-x-2}{x-1} dx \right| + \left| \int_{-2}^0 \frac{x+2}{x-1} dx \right| = |A| + |B|$$

$$\text{Mà } A = \int_{-4}^{-2} \frac{-x-2}{x-1} dx = \int_{-4}^{-2} \frac{-(x-1)-3}{x-1} dx = \int_{-4}^{-2} \left(-1 - \frac{3}{x-1} \right) dx = \left(-x - 3 \ln|x-1| \right) \Big|_{-4}^{-2}$$

$$= (2 - 3 \ln 3) - (4 - 3 \ln 5) = 3 \ln 5 - 3 \ln 3 - 2 = 3(\ln 5 - \ln 3) - 2$$

$$B = \int_{-2}^0 \frac{x+2}{x-1} dx = \int_{-2}^0 \frac{x-1+3}{x-1} dx = \int_{-2}^0 \left(1 + \frac{3}{x-1} \right) dx = \left(x + 3 \ln|x-1| \right) \Big|_{-2}^0 = 0 - (-2 + 3 \ln 3) = 2 - 3 \ln 3$$

$$S = |A| + |B| = 2 - 3(\ln 5 - \ln 3) + 2 - 3 \ln 3 = 4 - 3 \ln 5$$

Bài tập tương tự :

1. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

a) $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 1$

b) $y = -x^2 + 2$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = -1$; $x = 1$

c) $y = e^x$, $y = 0$, và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$

d) $y = x^2 - 4$ và trục hoành.

e) $y = x^2 - 4x + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$

f) $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$

g) $y = x^3 - 4x + 3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$

h) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $y = 0$

i) $y = x^4 - 5x^2 + 4$, $y = 0$, trục tung và đường thẳng $x = 2$

2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

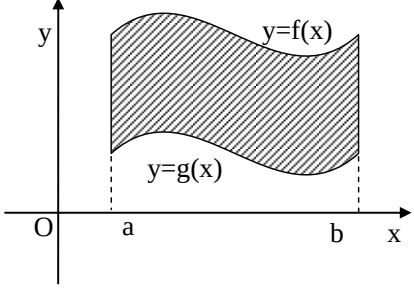
a) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$

b) $y = \ln(2x + 1)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = e$

c) $y = 2^x$, $y = 1$

d) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \pi$

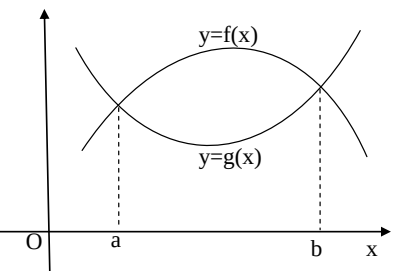
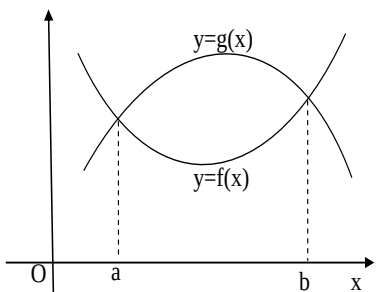
2) Hình phẳng giới hạn bởi 4 đường trong đó có hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$

Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b (a < b) \end{cases}$ $\Rightarrow S = \int_a^b f(x) - g(x) dx$	
--	--

Chú ý:

1. Cần phải xác định hình phẳng với đầy đủ 4 đường như trên rồi mới áp dụng công thức diện tích. Nếu $g(x) = 0$ bài toán trở về dạng 1
2. Việc tính tích phân $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ sử dụng một trong 3 cách tính ở trên

Chú ý ở cách 2 khi dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên đoạn $[a; b]$ để suy ra dấu của $f(x) - g(x)$ ta có

• Nếu trên đoạn $[a; b]$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía “trên” đồ thị hàm số $y = g(x)$ thì $f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b]$	
• Nếu trên đoạn $[a; b]$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía “dưới” đồ thị hàm số $y = g(x)$ thì $f(x) - g(x) \leq 0$, $\forall x \in [a; b]$	

Ví dụ 1: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi 4 đường

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \\ g(x) = -x^3 - 4x^2 + x + 4 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài giải: Dùng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

$$S = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$$

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên là nghiệm của phương trình :

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = -x^3 - 4x^2 + x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(2x+1) - (2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \notin [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{cases}$$

$$S = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \left| \int_0^1 (2x+1)(x^2-1) dx \right| + \left| \int_1^2 (2x+1)(x^2-1) dx \right| = \left| \frac{-7}{6} \right| + \frac{35}{6} = 7$$

Chú ý: Đối với các hình phẳng cho ở dạng

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad \text{chưa đủ 4 đường thì ta cần phải xác định}$$

các đường còn lại bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm. Trong

trường hợp tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ mà khi giải

$f(x) = g(x)$ cho nhiều nghiệm thì ta tính tích tích phân với cận là các nghiệm được lấy từ bé nhất đến lớn nhất

Ví dụ 2: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

Bài giải:

Cách 1: Dùng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

Giải phương trình hoành độ giao điểm tìm các đường còn thiếu

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Suy ra diện tích của hình phẳng trên là :

$$S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$$

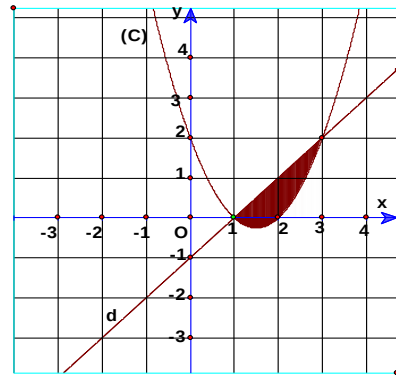
$$= \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 \right| = \left| \frac{-4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

Cách 2 : Dựa vào đồ thị

Ta có trên đoạn $[1;3]$ đồ thị hàm số $y=x-1$ nằm trên đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$

$$S = \int_1^3 [x-1-(x^2-3x+2)] dx \quad (\text{đvdt})$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$$



Cách 3 : Dùng phương pháp Xét dấu tam thức $x^2 - 4x + 3$ ta có :

x				
	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0
		+	-	+

Do đó $x^2 - 4x + 3 \leq 0 \quad \forall x \in [1; 3]$

$$S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$$

$$S = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$$

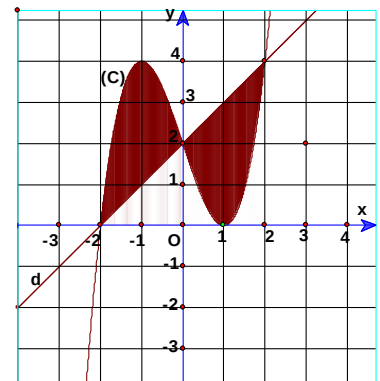
Ví dụ 3:

Cho hình phẳng ở hình bên

a) Viết phương trình của đường thẳng d .

b) Tính diện tích của hình phẳng đó , biết rằng đồ thị (C) có phương trình

$$y = x^3 - 3x + 2 .$$



Bài giải :

a) Phương trình của đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

Vì đường thẳng d đi qua hai điểm $(-2;0)$ và $(0;2)$ nên ta có :

$$\begin{cases} 0 = -2a + b \\ 2 = 2.0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng d : $y = x + 2$

b) Từ đồ thị ta có hình phẳng được giới hạn bởi 4 đường :
$$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 2 \\ y = x + 2 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Cách 1: Dùng đồ thị

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là:

$$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 2] \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Diện tích của hình phẳng trên là :

$$S = \int_{-2}^0 [x^3 - 3x + 2 - (x + 2)]dx + \int_0^2 [x + 2 - (x^3 - 3x + 2)]dx = 8$$

Cách 2: Đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

$$S = \int_{-2}^2 |x^3 - 3x + 2 - (x + 2)|dx = \int_{-2}^2 |x^3 - 4x|dx$$

$$S = \int_{-2}^0 |x^3 - 4x|dx + \int_0^2 |x^3 - 4x|dx$$

$$S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x)dx \right| = |4| + |-4| = 8 \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x = 1$ và tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

Bài giải: Trước tiên ta cần viết phương trình tiếp tuyến tại (2;4)

Sau đó xác định hình phẳng cần tính diện tích

Tính tích phân sử dụng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

$$+ y = x^3 - 3x + 2$$

$$\text{Khi } x = 2 \text{ ta có } y(2) = 8 - 6 + 2 = 4$$

$$y' = 3x^2 - 3; y'(2) = 12 - 3 = 9$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm (2;4) là $y = 9(x-2) + 4$ hay $y = 9x - 14$

$$\text{Hình phẳng cần tính diện tích được giới hạn bởi các đường } \begin{cases} y = x^3 - 3x + 2 \\ y = 9x - 14 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Giải phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x + 2 = 9x - 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_1^2 |x^3 - 3x + 2 - (9x - 14)|dx = \int_1^2 |x^3 - 12x + 16|dx = \left| \int_1^2 (x^3 - 12x + 16)dx \right| = \frac{7}{4}$$

Ví dụ 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \ln x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$

Bài giải: Sử dụng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân
 Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$x \ln x = x \Leftrightarrow x \ln x - x = 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) = 0$$

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Vậy hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là $x = e$.

Diện tích S được tính theo công thức :

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e |x \ln x - x| dx \\ &= \left| \int_1^e (x \ln x - x) dx \right| = \left| \int_1^e x \ln x - \int_1^e x dx \right| \\ &= -\frac{e^2 + 1}{4} + \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = -\frac{e^2 + 1}{4} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 3}{4} \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Hình phẳng sau được giới hạn bởi đồ thị (C) : $y = \frac{x}{4} \sqrt{3x^2 + 4}$ và đường

thẳng $y = x$

Hãy tính diện tích của hình phẳng đó .

Bài giải :

Ta tìm các đường còn thiếu bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm.

Sau đó dùng phương pháp đưa dấu gttđ ra ngoài dấu tích phân

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$\frac{x}{4} \sqrt{3x^2 + 4} = x \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{4} \sqrt{3x^2 + 4} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 + 4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Diện tích của hình phẳng đã cho là :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left| \frac{x}{4} \sqrt{3x^2 + 4} \right| dx \\ &= \int_{-2}^0 \left| \frac{x}{4} \sqrt{3x^2 + 4} \right| dx + \int_0^2 \left| \frac{x}{4} \sqrt{3x^2 + 4} \right| dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left| \int_{-2}^0 x \sqrt{3x^2 + 4} dx \right| + \frac{1}{4} \left| \int_0^2 x \sqrt{3x^2 + 4} dx \right| = \frac{1}{4} (|A| + |B|) \end{aligned}$$

Tính A

$$\text{Đặt } u = 3x^2 + 4 \Rightarrow du = 6x dx$$

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow u = 4$$

$$\text{Khi } x = -2 \Rightarrow u = 16$$

$$A = -\int_4^{16} \frac{1}{6} \sqrt{u} = -\frac{1}{6} \int_4^{16} u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_4^{16} = -\frac{1}{9} \sqrt{u^3} \Big|_4^{16} = -\frac{1}{9} (\sqrt{16^3} - \sqrt{4^3}) = -\frac{56}{9}$$

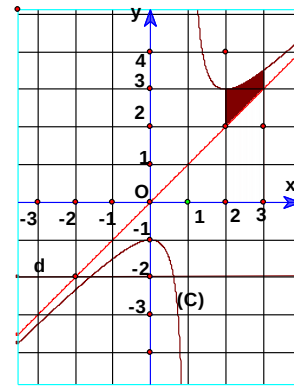
$$\text{Tương tự ta có } B = \frac{56}{9}$$

$$S = \frac{1}{4} \left(\left| \frac{-56}{9} \right| + \left| \frac{56}{9} \right| \right) = \frac{56 + 56}{9 \cdot 4} = \frac{112}{9 \cdot 4} = \frac{28}{9} \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị

(C) ở hình bên

- Tìm tiệm cận xiên Δ của đồ thị hàm số đó .
- Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , tiệm cận xiên Δ và các đường thẳng $x = 2$, $x = 3$.



Bài giải :

a) Ta có $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{x(x - 1) + 1}{x - 1} = x - \frac{1}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x - 1} \right) = 0$$

Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$

b) Để tính diện tích hình phẳng ta dùng đồ thị

Diện tích của hình phẳng cần tìm là :

$$\begin{aligned} S &= \int_2^3 |y - x| dx = \int_2^3 \left(x - \frac{1}{x - 1} - x \right) dx = \int_2^3 \frac{-1}{x - 1} dx \quad (\text{do đồ thị (C) nằm ở trên tiệm cận xiên}) \\ &= \left| -(\ln|x - 1|) \right|_2^3 = |-\ln 2 + \ln 1| = |-\ln 2 + 0| = \ln 2 \quad (\text{đvdt}) \end{aligned}$$

3) Hình phẳng giới hạn bởi nhiều đường cong (từ 3 đường trở lên)

Ví dụ tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số sau:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Đối với bài toán này để tính diện tích hình phẳng đã cho ta phải sử dụng phương pháp đồ thị

Bước 1: Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho, xác định phần hình phẳng cần tính diện tích

Bước 2: Tìm giao điểm các đồ thị rồi chia phần hình phẳng cần tính thành các phần hình phẳng chỉ giới hạn bởi một hoặc hai đường cong. Tính diện tích các hình phẳng con được phân chia

Bước 3: Diện tích cần tìm là tổng các diện tích tìm được ở trên

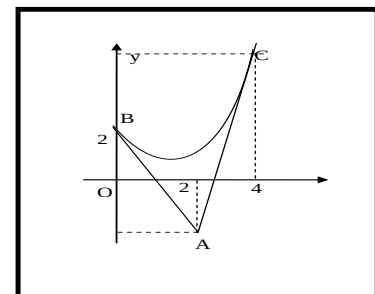
Ví dụ 1: Tìm diện tích hình phẳng S giới hạn bởi (P): $y = x^2 - 2x + 2$ và các tiếp tuyến của (P) đi qua A(2;-2)

Bài giải:

Ta cần viết phương trình tiếp tuyến của (P) đi qua A

Đường thẳng qua A có dạng d: $y = k(x - 2) - 2$

d là tiếp tuyến của (P) khi



$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = k(x - 2) - 2 \\ (x^2 - 2x + 2)' = (k(x - 2) - 2)' \end{cases}$$

Giải hệ tìm được $(x; k) = (0; -2)$ và $(x; k) = (4; -6)$

Ta tìm được hai tiếp tuyến qua A là

$d_1: y = -2x + 2$ tiếp xúc với (P) tại B(0; 2)

và $d_2: y = 6x - 14$ tiếp xúc với (P) tại C(4; 10)

Vậy hình phẳng có diện tích $S = S_1 + S_2$

S_1 là hình phẳng giới hạn bởi (P), d_1 , $x = 0$ và $x = 2$

S_2 là hình phẳng giới hạn bởi (P), d_2 , $x = 2$ và $x = 4$

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 [(x^2 - 2x + 2) - (-2x + 2)] dx + \int_2^4 [(x^2 - 2x + 2) - (6x - 14)] dx = \frac{16}{3}$$

(đvdt)

Ví dụ 2: tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P_1): y = x^2$, $(P_2): y = \frac{x^2}{4}$

$$(H_1): y = \frac{2}{x} \text{ và } (H_2): y = \frac{8}{x}$$

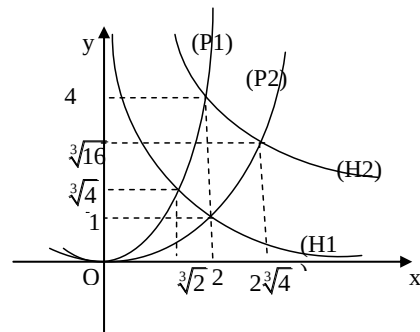
Vẽ đồ thị các hàm số và tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị ta được

Diện tích hình phẳng cần tìm $S = S_1 + S_2$ Trong đó

S_1 được giới hạn bởi (P_1) , (H_1) , $x = \sqrt[3]{2}$, $x = 2$

S_2 được giới hạn bởi (P_2) , (H_2) , $x = 2$, $x = 2\sqrt[3]{4}$

Từ đó ta tính được $S = 4\ln 2$ (đvtt)



Bài tập tương tự :

1. Hình phẳng sau được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, và các đường

thẳng $y = 2$, $y = -2x - 4$.

2. Tính diện tích của hình phẳng sau:

Giới hạn bởi đồ thị (C): $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$; đường thẳng d đi qua hai điểm (4; 0) và

(0; -4); đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.

3. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{6x + 4}$, trục hoành, và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$. Tính diện tích của hình phẳng (H).

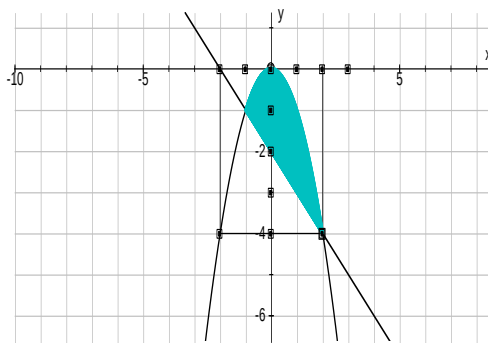
4. Hình phẳng sau được giới hạn bởi các đường $y = 2x^2 - 3x + 2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$. Tính diện tích của hình phẳng đó.

5. Cho hình phẳng sau được giới hạn bởi parabol (P) và trục hoành. Biết rằng (P) đi qua ba điểm (0; 0); (2; 0) và (2; 4).

a) Viết phương trình của parabol (P).

b) Tính diện tích của hình phẳng đã cho.

6. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi hai đường parabol (P) và đường thẳng d như hình vẽ sau :



Biết rằng parabol (P) đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $(2;-4)$; đường thẳng d đi qua hai điểm $(2;-4)$ và $(-2;0)$.

a) Viết phương trình của đường thẳng d và parabol (P) .

b) Tính diện tích của hình phẳng đã cho.

7. Tính diện tích hình phẳng sau giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x(x+1)(x-2)$ và trục hoành.

8. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn các đường sau:

$$y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}$$

9. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$; $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ và tiếp tuyến của đường cong đó tại điểm có hoành độ $x = 3$.

10. Tính diện tích của hình phẳng giới parabol $y = x^2 - 2x + 2$, tiếp tuyến với parabol tại điểm $M(3; 5)$ và trục tung.

11. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường sau $y = x \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, và $x = e$.

12. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = \sin x, \text{ trục hoành, trục tung và đường thẳng } x = \frac{\pi}{4}$$

13. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 1 + \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

Tính diện tích của hình phẳng trên.

14. Cho hình phẳng sau được giới hạn bởi các đường $y = \frac{-x+2}{2x+1}$, $y = 0$ và đường thẳng d đi qua hai điểm $(-2;0)$, $(0;2)$.

a) Viết phương trình của đường thẳng d.

b) Tính diện tích của hình phẳng trên.

15. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$; $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ và tiếp tuyến của đường cong đó tại điểm có hoành độ $x = 3$.

16. Tính diện tích của hình phẳng giới parabol $y = x^2 - 2x + 2$, tiếp tuyến với parabol tại điểm $M(3; 5)$ và trục tung.

17. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

$$y = xe^{\frac{x}{2}}, y = 0, \text{ trục tung và đường thẳng } x = 1$$

a) Tính diện tích của hình phẳng trên.

b) Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox.

18. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị (C).

c) Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số trên với đường thẳng $y = -x^2 + 1$.

19. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$

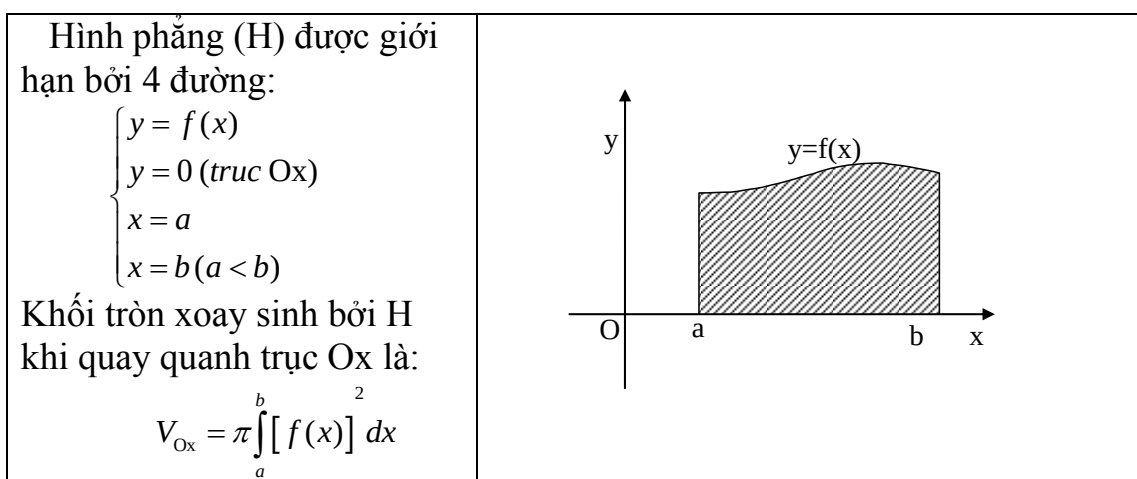
a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm uốn.

c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục tung và tiếp tuyến d.

7.2.2 Ứng dụng tích phân tính thể tích của vật thể tròn xoay

1) Vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay một hình phẳng giới hạn bởi 4 đường sau quanh trục Ox.



Chú ý

+ Để tính được thể tích của một khối tròn xoay ta cần xác định xem khối đó sinh bởi hình phẳng nào và quay xung quanh trục nào.

+ Cũng giống như tính diện tích hình các hình phẳng cần được xác định đủ 4 đường

+ Do không xuất hiện các dấu giá trị tuyệt đối nên việc tính các tích phân cũng đơn giản hơn ta chỉ cần xác định các cận tích phân rồi tính mà không phải chia đoạn để tính tích phân.

Ví dụ 1:

Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường sau quanh trục Ox: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Giải: Hình phẳng được giới hạn bởi một đường cong và đủ 4 đường nên

$$V_{Ox} = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{0}{5} \right) = \frac{32\pi}{5} \quad (\text{đvtt})$$

Ví dụ 2:

Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường sau quanh trục Ox.

$$y = x^2 - 2x, y = 0$$

Bài giải: Do hình phẳng chưa xuất hiện đủ bốn đường nên ta cần tìm các đường còn thiếu đó chính là các cận của tích phân

$$\text{Giải phương trình hoành độ giao điểm } x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15} \end{aligned} \quad (\text{đvtt})$$

Ví dụ 3: Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường sau quanh trục Ox.

$$y = \ln x, y = 0, x = 2.$$

Bài giải: Hình phẳng cũng chưa xuất hiện đủ 4 đường, ta giải phương trình hoành độ giao điểm $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$V_{Ox} = \pi \int_1^2 (\ln x)^2 dx$$

Tích phân từng phần 2 lần ta được $V = 2\pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$ (đvtt)

Bài tập:

1. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường sau quanh trục Ox. $y = |x^2 + 2x|, y = 0, x = 0, x = 1$.

2. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường sau quanh trục hoành Ox.

$$y = \sqrt{x^2 + 3x}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

3. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường sau quanh trục hoành Ox.

$$y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1.$$

4. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường sau quanh trục hoành Ox.

$$y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi.$$

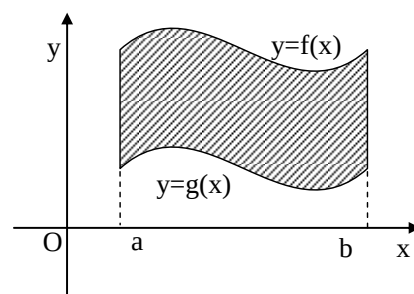
2) Vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay một hình phẳng giới hạn bởi 4 đường trong đó có hai đường $y=f(x)$ và $y=g(x)$ quanh trục Ox.

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi 4 đường:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \quad (a < b) \end{cases}$$

Khối tròn xoay sinh bởi H khi quay quanh trục Ox là:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b \left| [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right| dx$$



Ví dụ 1:

Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường sau quanh trục hoành Ox.

$$y = x^2 - 4, y = 2x - 4, x = 0, x = 2.$$

Bài giải:

Hình phẳng xác định đủ 4 đường vậy khi quay xung quanh Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V_{Ox} = \pi \int_0^2 \left| (x^2 - 4)^2 - (2x - 4)^2 \right| dx = \pi \int_0^2 |x^4 - 12x^2 + 16x| dx$$

Để khử dấu giá trị tuyệt đối ta giải phương trình

$$x^4 - 12x^2 + 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 4 \notin [0; 2] \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V_{Ox} = \pi \left| \int_0^2 (x^4 - 12x^2 + 16x) dx \right| = \frac{32\pi}{15}$$

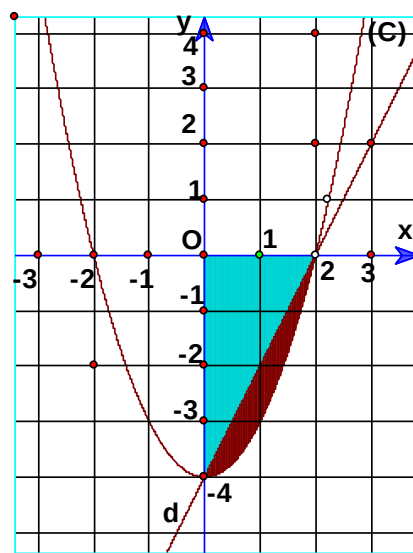
Cách 2: Ta có thể dùng đồ thị

Gọi V_1 là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường $y = 2x - 4, y = 0, x = 0, x = 2$ quanh trục Ox.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^2 (2x - 4)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (4x^2 - 16x + 16) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - 8x^2 + 16x \right) \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

Gọi V_2 là thể tích của vật thể trên tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường $y = x^2 - 4, y = 0, x = 0$ và $x = 2$ quanh trục Ox.

$$V_2 = \pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \frac{256\pi}{15}$$



Thể tích của vật thể tròn xoay cần tính là :

$$V = V_2 - V_1 = \frac{256\pi}{15} - \frac{32\pi}{3} = \frac{32\pi}{5} \quad (\text{đvtt})$$

Ví dụ 2:

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành và đường thẳng $y = x + 2$. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi hình H khi quay xung quanh trục Ox

Bài giải

Đây là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong, tuy nhiên hình phẳng chưa xuất hiện đủ 4 đường.

Ta tìm các đường còn thiếu bằng cách giải phương trình

$$4 - x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V_{Ox} = \pi \int_{-2}^1 |(x+2)^2 - (4-x^2)| dx = \pi \int_{-2}^1 |-x^4 + 9x^2 + 4x - 12| dx$$

$$\text{Giải phương trình } -x^4 + 9x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \notin [-2; 1] \\ x = -2 \in [-2; 1] \\ x = 1 \in [-2; 1] \end{cases}$$

$$V_{Ox} = \pi \int_{-2}^1 |-x^4 + 9x^2 + 4x - 12| dx = \pi \left| \int_{-2}^1 (-x^4 + 9x^2 + 4x - 12) dx \right| = \frac{188\pi}{15} \text{ (đvtt)}$$

Cách 2: Dùng đồ thị

Gọi V_1 là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường $y = x + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$ quanh trục Ox .

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-2}^1 (x+2)^2 dx \\ &= \pi \int_{-2}^1 (x^2 + 4x + 4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right) \Big|_{-2}^1 = 9\pi \end{aligned}$$

Gọi V_2 là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi bốn đường $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 2$ quanh trục Ox .

$$V_2 = \pi \int_1^2 (4 - x^2)^2 dx = \pi \int_1^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx = \frac{53\pi}{15}$$

Thể tích của vật thể tròn xoay cần tính là :

$$V = V_2 + V_1 = \frac{53\pi}{15} + 9\pi = \frac{188\pi}{15} \text{ (đvtt)}$$

Bài tập tương tự

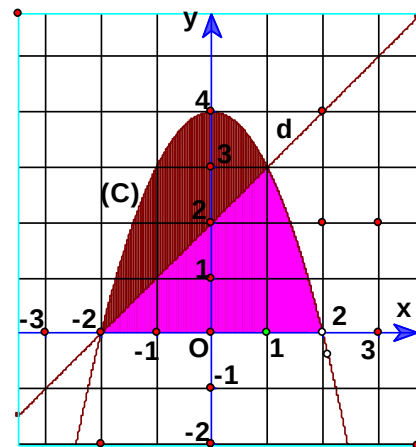
1 Cho hình phẳng sau giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng d.

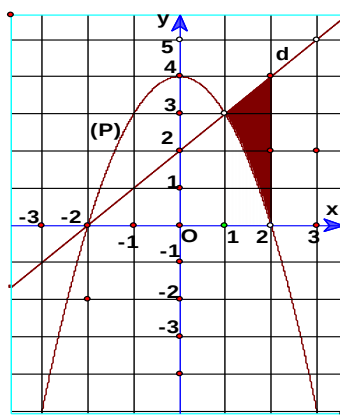
a) Viết phương trình của parabol (P) và của đường thẳng d.

b) Tính diện tích của hình phẳng đó.

c) Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng trên quanh trục hoành.

2. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng cho trong hình vẽ sau quanh trục hoành.





3 .Tính thể tích của vật thể tròn xoay, sinh bởi mỗi hình phẳng giới bởi các đường sau đây quanh trục Ox:

a) $y = 0, y = 2x - x^2$

b) $y = \sin^2 x, y = 0, x = 0, x = 1$

4 . Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C)

Hình phẳng sau giới hạn bởi đồ thị (C), tiệm cận xiên Δ và các đường thẳng $x = 2, x = 3$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục hoành.

5.Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

c) Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x = 1$ và tiếp tuyến Δ .

d) Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành quanh trục hoành.

3) Vật thể tròn xoay khi quay một hình phẳng giới hạn bởi 4 đường sau quanh trục tung

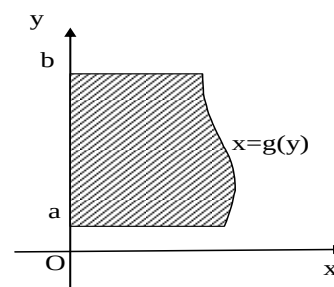
Tương tự nếu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ

thị hàm số $\begin{cases} x = g(y) \\ x = 0 \text{ (trục Oy)} \\ y = a \\ y = b (b > a) \end{cases}$.

Quay hình phẳng (H) quanh trục tung ta được một vật thể tròn xoay.

Thể tích của vật thể này được tính theo công thức

$$V_{Oy} = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy$$



Ví dụ 1:

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$y = \ln x$, trục tung, và hai đường thẳng $y = 0, y = 1$.

Tính thể của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng trên quanh trục tung .

Bài giải :

Ta có $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

Do đó thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi 4

$$\text{đường} \begin{cases} x = e^y \\ x = 0 \text{ (trục Oy)} \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$V_{Oy} = \pi \int_0^1 e^{2y} dy = \pi \frac{1}{2} e^{2y} \Big|_0^1 = \pi \frac{1}{2} (e^2 - e^0) = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) \quad (\text{đvtt})$$

Ví dụ 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong (C) : $x^2 + 4y^2 = 4$, trục tung, hai đường thẳng $x = 2$, $y = 2$.

Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng trên quanh trục tung .

Bài giải: Dùng đồ thị

Ta có

$$x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - 4y^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{1 - y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Gọi V_1 là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi nửa elip (E), $x=0$, $y=0$, $y=1$ quanh trục tung .

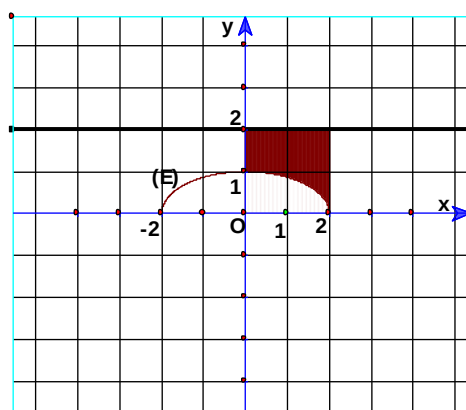
$$V_1 = \pi \int_0^1 (2\sqrt{1 - y^2})^2 dy = 4\pi \int_0^1 (1 - y^2) dy = \frac{8}{3} \pi$$

Gọi V_2 là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 2$, $x=0$, $y=0$, $y=2$ quanh trục tung .

$$V_2 = \pi \int_0^2 2^2 dy = \pi \int_0^2 4 dy = 8\pi$$

Thể tích của vật thể cần tính là :

$$V_{Oy} = V_2 - V_1 = 8\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{16}{3} \pi \quad (\text{đvtt})$$



Lời kết

Một viên kim cương sẽ chưa đẹp nếu ta chưa mài giũa và tạo hình cho nó. Cũng như vậy một bài toán ta sẽ không thấy hay nếu ta chưa hiểu hết về nó và chưa biết cách giải quyết triệt để bài toán đó. Với những giải pháp đã đưa ra để giải quyết bài toán ứng dụng tích phân tác giả hy vọng rằng tài liệu này sẽ tìm được sự ủng hộ của người đọc. Dù đã rất cố gắng, song đề tài cũng khó tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và của các em học sinh./.

Tài liệu tham khảo

1. Tài liệu giáo khoa theo chương trình cơ bản và nâng cao sách giáo khoa đại số và giải tích 12.
2. Các đề thi đại học qua từng năm.
3. Các sách tham khảo của tác giả Trần Phương, Phan Huy Khải.
4. Mạng Internet.

