

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐIỆN BIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN**

TRẦN THỊ THANH THỦY

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP
LÀM MẠNH BẤT ĐẲNG THỨC**

ĐIỆN BIÊN PHỦ, THÁNG 4 NĂM 2015

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐIỆN BIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN**

TRẦN THỊ THANH THỦY

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP
LÀM MẠNH BẤT ĐẲNG THỨC**

ĐIỆN BIÊN PHỦ, THÁNG 4 NĂM 2015

Mục lục

MỘT SỐ CHỮ VIẾT TẮT VÀ CÁC KÍ HIỆU	4
0.1 Mục đích, sự cần thiết	5
0.2 Phạm vi triển khai thực hiện	5
0.3 Nội dung	6
0.3.1 Tình trạng giải pháp đã biết	6
0.3.2 Nội dung giải pháp	6
0.3.3 Khả năng áp dụng của giải pháp	40
0.3.4 Hiệu quả, lợi ích thu được	41
0.3.5 Phạm vi ảnh hưởng của giải pháp	41
0.3.6 Kiến nghị đề xuất	41
TÀI LIỆU THAM KHẢO	42

MỘT SỐ CHỮ VIẾT TẮT VÀ CÁC KÍ HIỆU TRONG SÁNG KIẾN

I. Một số chữ viết tắt.

AM - GM – Arithmetic mean - Geometric mean.

MO – Olympic Toán quốc gia.

IMO – Olympic Toán quốc tế.

IMO Shortlish – Danh sách ngắn các bài đề nghị của các quốc gia trong IMO.

APMO – Olympic châu Á Thái Bình Dương.

VMEO – Kỳ thi giải toán trên mạng của trang www.diendantoanhoc.net.

TST – Đề dự tuyển thi toán quốc tế.

Đpcm – Điều phải chứng minh.

II. Các ký hiệu tổng và tích thông dụng.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \dots a_n.$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_2 a_n + \dots + a_{n-1} a_n.$$

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LÀM MẠNH BẤT ĐẲNG THỨC

0.1 Mục đích, sự cần thiết

Bất đẳng thức là một nội dung lâu đời và quan trọng của toán học. Sự ra đời và phát triển của bất đẳng thức có sức hút mạnh mẽ với những người yêu và đam mê toán học, không chỉ ở vẻ đẹp hình thức mà cả ở những bí ẩn nó luôn thôi thúc người làm toán phải tìm tòi, sáng tạo. Bất đẳng thức còn có rất nhiều ứng dụng trong các môn khoa học khác và trong cả thực tế. Ngày nay, bất đẳng thức vẫn luôn chiếm một vai trò quan trọng và vẫn thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi cấp trường, cấp tỉnh, quốc gia, quốc tế.

Trong sáng kiến kinh nghiệm này, tôi xin trình bày một hướng mới tiếp cận bất đẳng thức đó là **“Một số phương pháp làm mạnh bất đẳng thức”**. Từ các bất đẳng thức quen thuộc, kết hợp với một số bất đẳng thức cơ bản ta có thể xây dựng các bất đẳng thức mạnh hơn. Từ đó, ta sẽ xây dựng được rất nhiều các bất đẳng thức mới và lạ.

0.2 Phạm vi triển khai thực hiện

Đối tượng nghiên cứu

- Mục tiêu chương trình nâng cao và Toán chuyên THPT.
- Sách giáo khoa nâng cao và chuyên Toán.
- Các bài toán trong chương trình thi đại học và thi học sinh giỏi bậc THPT.
- Mức độ nhận thức của học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.

Phạm vi nghiên cứu

- Chương trình nâng cao và chuyên Toán THPT.
- Các chuyên đề thi đại học và học sinh giỏi quốc gia.
- Học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.

Tiến hành thực nghiệm

Dạy thực nghiệm cho học sinh đội tuyển học sinh giỏi quốc gia môn Toán năm 2015 và đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 11 năm học 2014 - 2015.

0.3 Nội dung

0.3.1 Tình trạng giải pháp đã biết

Bất đẳng thức là một nội dung khó của chương trình Toán THPT, nội dung bài học Bất đẳng thức trong chương trình sách giáo khoa lớp 10 nâng cao và cơ bản có số tiết khá khiêm tốn, như vậy học sinh chỉ có thể giải quyết được những bài toán hết sức cơ bản và đơn giản về bất đẳng thức trong sách giáo khoa và sách bài tập.

Trong thực tế tất cả các kì thi học sinh giỏi cấp trường, cấp Tỉnh, học sinh giỏi quốc gia và khu vực, nội dung bất đẳng thức là nội dung không thể thiếu và đòi hỏi học sinh phải có kĩ năng vận dụng tốt, linh hoạt nhiều kiến thức về nội dung này. Chính vì vậy nhằm giúp các em có thể vận dụng và kết nối các nội dung đã được học về bất đẳng thức tôi đã chọn đề tài này. Nội dung của sáng kiến kinh nghiệm này có thể giúp giải quyết một phần cơ bản các vấn đề đã nêu ở trên.

0.3.2 Nội dung giải pháp

0.3.2.1 Cơ sở lí luận và thực tiễn

a) Định nghĩa và tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1. Định nghĩa bất đẳng thức

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0.$$

$$A < B \Leftrightarrow A - B < 0.$$

Như vậy từ định nghĩa của bất đẳng thức, ta có ngay một phương pháp để chứng minh bất đẳng thức: Để chứng minh $A > B$, ta chỉ cần chứng minh $A - B > 0$ và muốn chứng minh $A < B$ ta chỉ cần chứng minh $A - B < 0$.

2. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1) Tính chất bắc cầu

$$\text{Nếu } a > b, b > c \text{ thì } a > c.$$

2) Nếu $a > b$ thì

$$ma > mb \quad \text{khi} \quad m > 0$$

$$ma < mb \quad \text{khi} \quad m < 0.$$

3) Nếu $a > b, c > d$ thì $a + c > b + d$.

4) Nếu $a > b, c < d$ thì $a - c > b - d$.

5) Nếu $a > b > 0; c > d > 0$ thì $ac > bd$.

6) Nếu $a > b > 0; d > c > 0$ thì $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

7) Nếu $a > b > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

8) $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$.

b) Một số hằng đẳng thức thường sử dụng.

1. Các hằng đẳng thức đáng nhớ

$$1) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab.$$

$$2) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) - 2ab.$$

$$3) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

$$4) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

$$5) a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$6) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b).$$

$$7) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b).$$

$$8) a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$$9) a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Các đẳng thức mở rộng

$$1) (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

$$2) (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3bc(b + c) + 3ca(c + a) + 6abc.$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

$$3) (a + b)(b + c)(c + a) = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc.$$

$$4) (a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc.$$

$$5) (a + b + c)(ab + bc + ca) = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc.$$

$$6) a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2}.$$

$$7) a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a + b + c)}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

$$8) a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 = \frac{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3}{3}.$$

$$9) a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a = \frac{(2a+b)(a-b)^2 + (2b+c)(b-c)^2 + (2c+a)(c-a)^2}{3}.$$

$$10) a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3 = \frac{(a + b + c)}{3} [(b - a)^3 + (c - b)^3 + (a - c)^3].$$

c) Bất đẳng thức AM – GM

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm, ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n \geq 0$.

Hệ quả 1.1.1. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình điều hòa.

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương, ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

d) Bất đẳng thức hoán vị

Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự cùng chiều nhau chẳng hạn là hai dãy đơn điệu tăng

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}.$$

Gọi $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Khi đó ta có $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Hệ quả 1.1.2. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Cho hai bộ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Hệ quả 1.1.3. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng Engel

Cho hai bộ số $a_i \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}^* (i = \overline{1, n})$, khi đó

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{x_i} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}.$$

Hệ quả 1.1.4. Bất đẳng thức Nesbit.

$$\text{Với } a, b, c > 0, \text{ ta có } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Hệ quả 1.1.5. Bất đẳng thức Tchebyshev

Cho hai bộ số thực $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n; b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, ta có

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

e) Bất đẳng thức Schur tổng quát

Định lý. Với $a, b, c > 0$ và k là số thực bất kỳ ta luôn có

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-c)(b-a) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ ta có

$$VT = c^k(a-b)(b-c) + (a-b)[a^k(a-c) - b^k(b-c)] \geq 0.$$

Điều này hiển nhiên đúng. Bất đẳng thức Schur được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Đặc biệt khi $k = 1$ và $k = 2$:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(a^2+c^2)$$

0.3.2.2 Giải pháp thực hiện

a) Xây dựng bất đẳng thức xoay vòng từ bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}}.$$

Xuất phát từ các bất đẳng thức cơ bản ta có thể xây dựng được các bài toán chứng minh bất đẳng thức khá thú vị mà cách làm hết sức đơn giản. Từ bất đẳng thức ban đầu $(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y$. Ta có thể xây dựng các bất đẳng thức đưa về dạng

$$\alpha(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \quad \forall \alpha \geq 0.$$

Nếu $\forall x, y \geq 1$, đặt $\alpha = xy - 1$ thì ta luôn có $(xy-1)(x-y)^2 \geq 0$.

Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 2.1 (Đề thi học sinh giỏi TPHCM 2002 – 2003)

Cho $x, y \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}. \quad (2.1)$$

Lời giải.

Ta có, do $x, y \geq 1$ suy ra $xy \geq 1$ hay $xy - 1 \geq 0$, vậy $xy + 1 > 0$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
(1.1) &\Leftrightarrow (1+xy)(1+y^2) + (1+xy)(1+x^2) \geq 2(1+x^2)(1+y^2) \\
&\Leftrightarrow xy + y^2 + xy^3 + xy + x^2 + x^3y \geq 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 \\
&\Leftrightarrow x^3y + xy^3 + 2xy - x^2 - y^2 - 2x^2y^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (xy-1)(x-y)^2 \geq 0, \quad \forall x, y \geq 1
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ bài toán trên ta có bất đẳng thức tương đương: Với $x, y \geq 1$ ta có

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}.$$

Từ đẳng thức trên ta có được cách giải bài toán sau

Bài toán 2.2. TS vào 10 Chuyên KHTN 2004

Cho $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{1}{1+\sqrt[4]{ab^3}} + \frac{1}{1+\sqrt[4]{bc^3}} + \frac{1}{1+\sqrt[4]{ca^3}}. \quad (2.2)$$

Lời giải.

Từ bài toán 2.1 ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}.$$

Khi đó ta có

$$\frac{1}{1+a} + \frac{3}{1+b} = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{2}{1+b} \geq 2 \left(\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} \right).$$

Hay

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+a} + \frac{3}{1+b} &\geq \frac{4}{1+\sqrt{b\sqrt{ab}}} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{3}{1+b} &\geq \frac{4}{\sqrt[4]{ab^3}}. \quad (1)
\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{1+b} + \frac{3}{1+c} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{bc^3}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{1+c} + \frac{3}{1+a} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{ca^3}} \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) rồi chia cho 4 ta được điều phải chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Mở rộng bài toán 2.1 trên với 3 biến x, y, z ta được bài toán sau.

Bài toán 2.3 .

Cho $x, y, z \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} \geq \frac{3}{1+xyz}. \quad (2.3)$$

Lời giải.

Áp dụng bài toán 2.1 trên ta có

$$\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} \geq \frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{1+z^3} + \frac{1}{1+xyz} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xyz^4}} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} + \frac{1}{1+xyz} \geq 2 \left[\frac{1}{1+\sqrt{x^3y^3}} + \frac{1}{1+\sqrt{xyz^4}} \right].$$

Áp dụng (2.1) ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{x^3y^3}} + \frac{1}{1+\sqrt{xyz^4}} \geq \frac{2}{1+\sqrt[4]{x^4y^4z^4}}.$$

hay

$$\frac{1}{1+\sqrt{x^3y^3}} + \frac{1}{1+\sqrt{xyz^4}} \geq \frac{2}{1+xyz}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} + \frac{1}{1+xyz} \geq \frac{4}{1+xyz}.$$

Hay

$$\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} \geq \frac{3}{1+xyz}. \text{ (Đpcm.)}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Mở rộng bài toán cho 4 biến ta được bài toán.

Bài toán 2.4.

Cho $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$. **Chứng minh rằng**

$$\frac{1}{1+x_1^4} + \frac{1}{1+x_2^4} + \frac{1}{1+x_3^4} + \frac{1}{1+x_4^4} \geq \frac{4}{1+x_1x_2x_3x_4}. \quad (2.4)$$

Tổng quát bài toán 2.1 cho n biến ta được bài toán sau

Bài toán 2.5.

Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 1, n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x_1^n} + \frac{1}{1+x_2^n} + \frac{1}{1+x_3^n} + \dots + \frac{1}{1+x_n^n} \geq \frac{n}{1+x_1x_2x_3\dots x_n}. \quad (2.5)$$

Lời giải.

Ta sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp

Từ bài toán 2.1 ta có được bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Vậy với $n = 2$ bất đẳng thức đúng

Giả sử với $n = k$ ($k \geq 2$) bất đẳng thức đúng, nghĩa là

$$\frac{1}{1+x_1^k} + \frac{1}{1+x_2^k} + \dots + \frac{1}{1+x_k^k} \geq \frac{k}{1+\sqrt[k]{x_1^k x_2^k \dots x_k^k}} \quad (*)$$

Ta chứng minh với $n = k + 1$ bất đẳng thức trên luôn đúng, nghĩa là phải chứng minh

$$\frac{1}{1+x_1^{k+1}} + \frac{1}{1+x_2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{1+x_{k+1}^{k+1}} \geq \frac{k+1}{1+x_1x_2\dots x_{k+1}}.$$

Đặt

$$S = \frac{1}{1+x_1^{k+1}} + \frac{1}{1+x_2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{1+x_{k+1}^{k+1}}.$$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\frac{1}{1+x_1^{k+1}} + \frac{1}{1+x_2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{1+x_k^{k+1}} \geq \frac{k}{1+\sqrt[k]{x_1^{k+1}x_2^{k+1}\dots x_k^{k+1}}}.$$

Tiếp tục áp dụng giả thiết quy nạp với $(k-1)$ phân số $\frac{1}{1+x_1x_2\dots x_{k+1}}$ ta có

$$\frac{1}{1+x_{k+1}^{k+1}} + \frac{1}{1+x_1x_2\dots x_{k+1}} + \dots + \frac{1}{1+x_1x_2\dots x_{k+1}} \geq \frac{k}{1+\sqrt[k]{x_1^{k+1}x_2^{k+1}\dots x_{k+1}^{2k}}}.$$

Mặt khác ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt[k]{x_1^{k+1}x_2^{k+1}\dots x_k^{k+1}}} + \frac{1}{1+\sqrt[k]{x_1^{k-1}x_2^{k-1}\dots x_{k+1}^{2k}}} \geq \frac{2}{1+\sqrt[k]{x_1^{2k}x_2^{2k}\dots x_{k+1}^{2k}}}.$$

Hay

$$\frac{1}{1+\sqrt[k]{x_1^{k+1}x_2^{k+1}\dots x_k^{k+1}}} + \frac{1}{1+\sqrt[k]{x_1^{k-1}x_2^{k-1}\dots x_{k+1}^{2k}}} \geq \frac{2}{1+x_1x_2\dots x_{k+1}}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S + \frac{k-1}{1+x_1x_2\dots x_{k+1}} &\geq \frac{2k}{1+x_1x_2\dots x_{k+1}} \\ \Leftrightarrow S &\geq \frac{k+1}{1+x_1x_2\dots x_{k+1}}. \end{aligned}$$

Vậy suy ra

$$\frac{1}{1+x_1^n} + \frac{1}{1+x_2^n} + \frac{1}{1+x_3^n} + \dots + \frac{1}{1+x_n^n} \geq \frac{n}{1+x_1x_2x_3\dots x_n} \quad (n \geq 2).$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ($x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$)

Xây dựng bài toán mới

Từ bài toán 2.1 ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \quad (\forall x, y \geq 1).$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương x, y ta có

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Hay

$$1 + x + y \geq 1 + 2\sqrt{xy}.$$

Từ đó ta có được bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} (1 + x + y) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \right) &\geq (1 + 2\sqrt{xy}) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{xy}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{y}{1+x} \right) + \left(1 + \frac{x}{1+y} \right) &\geq 2 + \frac{2\sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} &\geq \frac{2\sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có được bài toán mới sau

Bài toán mới 2.6.

Với $x, y \geq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}. \quad (2.6)$$

Nhận xét. Phát triển bài toán trên cho ba biến ta được

$$\begin{aligned} (1 + x + y + z) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \right) &\geq (1 + 3\sqrt[3]{xyz}) \left(\frac{3}{1 + \sqrt[3]{xyz}} \right) \\ \Leftrightarrow 3 + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y} + \frac{x+y}{1+z} &\geq 3 + \frac{3.2\sqrt[3]{xyz}}{1 + \sqrt[3]{xyz}} \\ \Leftrightarrow \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y} + \frac{x+y}{1+z} &\geq \frac{3.2\sqrt[3]{xyz}}{1 + \sqrt[3]{xyz}} \end{aligned}$$

Từ đó ta được bài toán sau

Mở rộng bài toán 2.6 cho n biến dương ta được bài toán sau

Bài toán mới 2.8.

Với $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$; $n \geq 2$; $S = \sum_{i=1}^n x_i$, chứng minh rằng

$$\frac{S - x_1}{1 + x_1} + \frac{S - x_2}{1 + x_2} + \dots + \frac{S - x_n}{1 + x_n} \geq \frac{n(n-1)}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}}. \quad (2.8)$$

b) Xây dựng bất đẳng thức từ dạng làm mạnh

$$\alpha(a-b)^2 \geq 0, \alpha \geq 0.$$

Hướng biến đổi 1.

Nếu $x, y > 0$ thì $\alpha = xy + 1 > 0$, . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(xy + 1)(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y > 0.$$

Xuất phát từ bất đẳng thức trên ta có bài toán

Bài toán 2.9.

Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}. \quad (2.9)$$

Lời giải.

Do $x, y > 0$ nên ta có $1 + xy > 0$.

Khi đó

$$(2.9) \Leftrightarrow (1+y)^2(1+xy) + (1+x)^2(1+xy) \geq (1+x)^2(1+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (2+2x+2y+x^2+y^2)(1+xy) \geq (1+2x+x^2)(1+2y+y^2)$$

$$\Leftrightarrow 2+2(x+y)+x^2+y^2+2xy+2xy(x+y)+xy(x^2+y^2) \geq 1+2y+y^2+2x+4xy+x^2+2xy(x+y)+x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow 1+xy(x^2+y^2) \geq 2xy+x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow (xy+1)(x-y)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng với } \forall x, y > 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Cho các số $x, y, z, t > 0$. Áp dụng bài toán (2.9) ta có các bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$$
$$\frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq \frac{1}{1+zt}$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq \frac{1}{1+zt} + \frac{1}{1+xy}$$

Mặt khác ta có

$$\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+zt} = \frac{2+xy+zt}{1+xy+zt+xyzt}$$

Vậy nếu cho thêm giả thiết $xyzt = 1$ ta được bài toán

Bài toán 2.10. (China TST 2004)

Cho $x, y, z, t > 0$ **và thỏa mãn** $x.y.z.t = 1$. **Chứng minh rằng**

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq 1. \quad (2.10)$$

Hướng biến đổi 2. Nếu $x, y > 0$ đặt $\alpha = x + y$ thì ta có bất đẳng thức sau

$$(x+y)(x-y)^2 \geq 0.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} & (x+y)(x-y)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x+y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x^3 + y^3 - xy(x+y) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \\ \Leftrightarrow & \frac{x^3}{y^2} + y \geq \frac{x^2}{y} + x. \end{aligned}$$

Vậy tương tự với 3 số $x, y, z > 0$ ta có các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{y^2} + y & \geq \frac{x^2}{y} + x. \\ \frac{y^3}{z^2} + z & \geq \frac{y^2}{z} + y. \\ \frac{z^3}{x^2} + x & \geq \frac{z^2}{x} + z. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2} \geq \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}.$$

Từ đó ta có bài toán.

Bài toán 2.11. (Junior Balkan 2000)

Chứng minh rằng với $\forall x, y, z > 0$ ta có

$$\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2} \geq \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}. \quad (2.11)$$

Nhận xét

Từ đẳng thức $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ ta biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} (x + y)(x - y)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + y^3 &\geq x^2y + xy^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^3}{y} + y^2 &\geq x^2 + xy \end{aligned}$$

Từ đó ta có bài toán

Bài toán 2.12. (TS vào 10 Chuyên KHTN HN 1996)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca. \quad (2.12)$$

Lời giải.

Do a, b dương ta có $(a + b)(a - b)^2 \geq 0$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2 - ab) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 &\geq a^2b + ab^2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^3}{b} + b^2 &\geq a^2 + ab. \end{aligned} \quad (1)$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^3}{c} + c^2 \geq b^2 + bc. \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{a} + a^2 \geq c^2 + ac. \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét. Như trên ta biến đổi bất đẳng thức $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ theo cách khác ta được

$$\begin{aligned} (x+y)(x-y)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - xy) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 6y^3 - x^2y - xy^2 &\geq 5y^3 - x^3 \\ \Leftrightarrow (2y-x)(xy+3y^2) &\geq 5y^3 - x^3 \\ \Leftrightarrow \frac{5y^3 - x^3}{xy+3y^2} &\leq 2y-x. \end{aligned}$$

Vậy với các số $x, y, z > 0$ ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{5y^3 - x^3}{xy+3y^2} &\leq 2y-x. \\ \frac{5z^3 - y^3}{yz+3z^2} &\leq 2z-y. \\ \frac{5x^3 - z^3}{xz+3x^2} &\leq 2x-z. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức

$$\frac{5x^3 - z^3}{xz+3x^2} + \frac{5z^3 - y^3}{yz+3z^2} + \frac{5y^3 - x^3}{xy+3y^2} \leq x+y+z.$$

Từ đó ta có bài toán

Bài toán mới 2.13.

Chứng minh rằng với $\forall x, y, z > 0$ ta có

$$\frac{5x^3 - z^3}{xz+3x^2} + \frac{5y^3 - x^3}{xy+3y^2} + \frac{5z^3 - y^3}{yz+3z^2} \leq x+y+z. \quad (2.13)$$

Mở rộng bài toán trên cho n biến ta có được bài toán sau

Bài toán mới 2.14.

Chứng minh rằng với $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ta có

$$\frac{5x_1^3 - x_3^3}{x_1x_3 + 3x_1^2} + \frac{5x_2^3 - x_4^3}{x_2x_4 + 3x_2^2} + \dots + \frac{5x_{n-1}^3 - x_1^3}{x_1x_{n-1} + 3x_{n-1}^2} + \frac{5x_n^3 - x_2^3}{x_2x_n + 3x_n^2} \leq \sum x_i. \quad (2.14)$$

Nhận xét. Biến đổi bất đẳng thức $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ theo cách khác ta được

$$(x+y)(x-y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - xy) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3) \geq (x+y)(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{x+y}{2}$$

Từ đó ta có được bất đẳng thức

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + x^2} \geq x + y + z \quad (*)$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3 - z^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3 - x^3}{z^2 + x^2} \geq 0$$

Thật vậy, không giảm tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$ khi đó

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} &\geq \frac{x^3 - y^3}{y^2 + z^2} \\ \frac{z^3 - x^3}{z^2 + x^2} &\geq \frac{z^3 - x^3}{y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3 - z^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3 - x^3}{z^2 + x^2} \geq 0$$

Hãy ta được bất đẳng thức

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \geq \frac{y^3}{x^2+y^2} + \frac{z^3}{y^2+z^2} + \frac{x^3}{z^2+x^2}$$

Vậy suy ra

$$2 \left[\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \right] \geq \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3+z^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3+x^3}{z^2+x^2} \quad (**)$$

Vậy từ (*), (**) ta có được một bất đẳng thức mạnh sau

Bài toán mới 2.15.

Với $x, y, z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \geq \frac{x+y+z}{2}. \quad (2.15)$$

Từ đó ta có bài toán

Bài toán 2.15*.(Bài toán 1.7)

Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geq \frac{x+y+z}{3}. \quad (2.15)$$

Lời giải.

Cách 1. Lời giải bài 1.7.

Cách 2.

Ta có

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geq \frac{x+y+z}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geq \frac{2x-y}{3} + \frac{2y-z}{3} + \frac{2z-x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{x^2+xy+y^2} - \frac{2x-y}{3} \right) + \left(\frac{y^3}{y^2+yz+z^2} - \frac{2y-z}{3} \right) + \left(\frac{z^3}{z^2+zx+x^2} - \frac{2z-x}{3} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^3 - (x^2+xy+y^2)(2x-y)}{x^2+xy+y^2} + \frac{3y^3 - (y^2+yz+z^2)(2y-z)}{y^2+yz+z^2} + \frac{3z^3 - (z^2+zx+x^2)(2z-x)}{z^2+zx+x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + y^3 - x^2y - xy^2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3 - y^2z - z^2y}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3 - x^2z - xz^2}{z^2 + zx + x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{(y+z)(y-z)^2}{y^2 + yz + z^2} + \frac{(z+x)(z-x)^2}{z^2 + zx + x^2} \geq 0$$

luôn đúng với mọi $x, y, z > 0$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Ta có

$$x - y + y - z + z - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 - z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 - x^3}{z^2 + zx + x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} = \frac{y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{x^3}{z^2 + zx + x^2}$$

Hay

$$2 \left[\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \right] = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{x^3}{x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}}$$

Hay

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

Tương tự ta có được

$$\frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{y^2 + z^2} \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{z^3}{z^2 + x^2} \quad (3)$$

Cộng vế với vế của bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} \right]$$

Từ bài toán 2.15 ta suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Tổng quát hóa bài toán trên ta được bài toán

Bài toán mới 2.15.**

Với $x, y, z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2 + \alpha xy} + \frac{y^3}{y^2 + z^2 + \alpha yz} + \frac{z^3}{z^2 + x^2 + \alpha zx} \geq \frac{x + y + z}{2 + \alpha}. \quad (\alpha > 0)$$

c) Xây dựng bất đẳng thức từ dạng làm mạnh

$$(c - a) \left(\frac{1}{a + b} - \frac{1}{c + b} \right) = \frac{(c - a)^2}{(a + b)(c + b)}, \quad a, b, c > 0.$$

Xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Ta xây dựng các bất đẳng thức có dạng

$$\alpha(x - y)^2 + \beta(y - z)^2 + \gamma(z - x)^2 \geq 0 \text{ với } \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

Hướng biến đổi 1.

$$\text{Ta thấy } (x - y) \left(\frac{1}{y + z} - \frac{1}{x + z} \right) = \frac{(x - y)^2}{(y + z)(x + z)}$$

Từ đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{(x - y)^2}{(x + z)(y + z)} + \frac{(y - z)^2}{(y + x)(z + x)} + \frac{(z - x)^2}{(x + y)(z + y)} \geq 0.$$

Biến đổi bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & \frac{(x - y)^2}{(x + z)(y + z)} + \frac{(y - z)^2}{(y + x)(z + x)} + \frac{(z - x)^2}{(x + y)(z + y)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x - y) \left[\frac{1}{y + z} - \frac{1}{x + z} \right] + (y - z) \left[\frac{1}{x + z} - \frac{1}{x + y} \right] + (z - x) \left[\frac{1}{x + y} - \frac{1}{y + z} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{x+y} [z-x-y+z] + \frac{1}{y+z} [x-y-z+x] + \frac{1}{z+x} [y-z-x+y] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x+y} [2z-(x+y)] + \frac{1}{y+z} [2x-(y+z)] + \frac{1}{z+x} [2y-(z+x)] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{z+x} + \frac{2z}{x+y} \geq 3 \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta được bài toán thường gặp trong chương trình lớp 10

Bài toán 2.16.

Cho $x, y, z > 0$, **chứng minh rằng**

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \quad (2.16)$$

Nhận xét. Mở rộng bài toán trên 5 biến $a, b, c, d, e > 0$.

Ta thấy

$$\begin{aligned}
(c-a) \left[\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} \right] &= \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}. \\
(d-b) \left[\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+d} \right] &= \frac{(d-b)^2}{(b+c)(c+d)}. \\
(e-c) \left[\frac{1}{c+d} - \frac{1}{d+e} \right] &= \frac{(e-c)^2}{(c+d)(d+e)}. \\
(a-d) \left[\frac{1}{d+e} - \frac{1}{a+e} \right] &= \frac{(a-d)^2}{(a+e)(e+d)}. \\
(b-e) \left[\frac{1}{a+e} - \frac{1}{a+b} \right] &= \frac{(b-e)^2}{(a+e)(a+b)}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 2.17.

Cho $a, b, c, d, e > 0$. **Chứng minh rằng**

$$\frac{c+e}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} + \frac{e+b}{c+d} + \frac{a+c}{d+e} + \frac{b+d}{e+a} \geq 5. \quad (2.17)$$

Lập luận tương tự mở rộng bài toán trên cho n biến dương ta được bài toán sau

Bài toán 2.18.

Cho n số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$. **Chứng minh rằng**

$$\frac{x_3 + x_n}{x_1 + x_2} + \frac{x_4 + x_{n-1}}{x_2 + x_3} + \frac{x_5 + x_{n-2}}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_2 + x_{n-1}}{x_n + x_1} \geq n. \quad (2.18)$$

Nhận xét. Ta mở rộng bài toán theo hướng khác bằng cách cho các hệ số m, n, p vào các đẳng thức thì

$$m \cdot \frac{x}{y+z} + n \cdot \frac{y}{z+x} + p \cdot \frac{z}{x+y} \geq ?$$

Xét bài toán

Bài toán 2.19.(HSG lớp 12 TPHCM 2002 – 2003)

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 8. \quad (2.19)$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &= \frac{25a}{b+c} + 25 + \frac{16b}{c+a} + 16 + \frac{c}{a+b} + 1 - 42 \\ &= \frac{25(a+b+c)}{b+c} + \frac{16(a+b+c)}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \\ &= (a+b+c) \left(\frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 42. \end{aligned}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng Engel ta có

$$\left(\frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{(5+4+1)^2}{2(a+b+c)}.$$

Hay

$$\left(\frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{50}{2(a+b+c)}.$$

Vậy suy ra

$$(a+b+c) \left(\frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq (a+b+c) \frac{50}{(a+b+c)}.$$

Hay

$$(a+b+c) \left(\frac{25}{b+c} + \frac{16}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 50.$$

Suy ra

$$\frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 8.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=k \\ b+c=5k \\ c+a=4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=k \\ c=4k \end{cases} \quad (\text{vô lý vì } a > 0)$$

Vậy dấu đẳng thức không xảy ra.

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Tổng quát bài toán nếu ta thay 25 bởi m , 16 bởi n , 1 bởi p với m, n, p dương thì ta có đẳng thức

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \geq (a+b+c) \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2}{2(a+b+c)} - (m+n+p).$$

Hay

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \geq (\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2 - (m+n+p).$$

Từ đó ta được bài toán tổng quát

Bài toán 2.20.

Cho m, n, p và a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} > (\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2 - (m+n+p). \quad (2.20)$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \\ &= \frac{ma}{b+c} + m + \frac{nb}{c+a} + n + \frac{pc}{a+b} + p - (m+n+p) \\ &= \frac{m(a+b+c)}{b+c} + \frac{n(a+b+c)}{c+a} + \frac{p(a+b+c)}{a+b} - (m+n+p) \\ &= (a+b+c) \left(\frac{m}{b+c} + \frac{n}{c+a} + \frac{p}{a+b} \right) - (m+n+p). \end{aligned}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng Engel ta có

$$\left(\frac{m}{b+c} + \frac{n}{c+a} + \frac{p}{a+b} \right) \geq \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2}{2(a+b+c)}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \geq (a+b+c) \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2}{2(a+b+c)} - (m+n+p).$$

Hay

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \geq (\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})^2 - (m+n+p).$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{m}}{b+c} = \frac{\sqrt{n}}{c+a} = \frac{\sqrt{p}}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=k & (k>0) \\ b+c=k \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{p}} \\ c+a=k \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=k \cdot \frac{\sqrt{p} + \sqrt{n} - \sqrt{m}}{2\sqrt{p}} \\ b=k \cdot \frac{\sqrt{p} - \sqrt{n} + \sqrt{m}}{2\sqrt{p}} \\ c=k \cdot \frac{-\sqrt{p} + \sqrt{n} + \sqrt{m}}{2\sqrt{p}} \end{cases}$$

Do $a, b, c > 0$ nên điều kiện của m, n, p để dấu đẳng thức xảy ra là

$$\begin{cases} \sqrt{p} + \sqrt{n} > \sqrt{m} \\ \sqrt{m} + \sqrt{n} > \sqrt{p} \\ \sqrt{p} + \sqrt{m} > \sqrt{n} \end{cases}$$

Hướng biến đổi 2. Ta thấy

$$xy(x-y) \left(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{y+z} \right) = \frac{xy(x-y)^2}{(x+z)(y+z)}.$$

Vậy với

$$\alpha = \frac{xy}{(x+z)(y+z)}; \beta = \frac{yz}{(y+x)(z+x)}; \gamma = \frac{zx}{(z+y)(x+y)}$$

ta có được bài toán sau.

Bài toán 2.21

Chứng minh rằng với $\forall x, y, z > 0$ ta có

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x} \leq \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{x + y + z}. \quad (2.21)$$

Lời giải.

Biến đổi (2.21) ta được

$$(2.21) \Leftrightarrow (x + y + z) \left[\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x} \right] \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{z(x^2 + y^2)}{x + y} + \frac{x(y^2 + z^2)}{y + z} + \frac{y(z^2 + x^2)}{z + x} \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(x^2 + y^2)}{x + y} + \frac{x(y^2 + z^2)}{y + z} + \frac{y(z^2 + x^2)}{z + x} \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} - x \right) + y \left(\frac{y^2 + z^2}{y + z} - y \right) + z \left(\frac{z^2 + x^2}{z + x} - z \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{y(y - x) + z(z - x)}{y + z} \right) + y \left(\frac{x(x - y) + z(z - y)}{z + x} \right) + z \left(\frac{x(x - z) + y(y - z)}{x + y} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x - y) \left(\frac{1}{x + z} - \frac{1}{y + z} \right) + yz(y - z) \left(\frac{1}{x + y} - \frac{1}{x + z} \right) + xz(z - x) \left(\frac{1}{y + z} - \frac{1}{z + x} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{xy(x - y)^2}{(x + z)(y + z)} - \frac{yz(y - z)^2}{(y + z)(x + y)} - \frac{xz(z - x)^2}{(x + y)(y + z)} \leq 0 \text{ luôn đúng với } \forall x, y, z > 0$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Vậy từ đó ta có

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x} \leq \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{x + y + z} \quad \text{với } \forall x, y, z > 0$$

Mở rộng bài toán trên cho n biến ta được bài toán

Bài toán 2.22.

Với $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2 + x_1^2}{x_n + x_1} \leq \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (2.22)$$

Hướng biến đổi 3. Ta có

$$\frac{(x - y)}{z} \left(\frac{1}{y + z} - \frac{1}{x + z} \right) = \frac{(x - y)^2}{z(y + z)(z + x)}$$

Từ đó với $x, y, z > 0$ ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
& \frac{(x-y)^2}{z(y+z)(x+z)} + \frac{(y-z)^2}{x(x+y)(z+x)} + \frac{(z-x)^2}{y(z+y)(x+y)} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-y}{z} \left[\frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+z} \right] + \frac{y-z}{x} \left[\frac{1}{x+z} - \frac{1}{x+y} \right] + \frac{z-x}{y} \left[\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+z} \right] \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \left[\frac{z-x}{y} - \frac{y-z}{x} \right] + \frac{1}{y+z} \left[\frac{x-y}{z} - \frac{z-x}{y} \right] + \frac{1}{z+x} \left[\frac{y-z}{x} - \frac{x-y}{z} \right] \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{z}{xy} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} \geq \frac{x^2+y^2}{xy(x+y)} + \frac{y^2+z^2}{yz(y+z)} + \frac{z^2+x^2}{zx(z+x)} \\
& \Leftrightarrow z \cdot \frac{x^2+y^2}{x+y} + x \cdot \frac{y^2+z^2}{y+z} + y \cdot \frac{z^2+x^2}{z+x} \leq x^2 + y^2 + z^2
\end{aligned}$$

Vậy ta có bài toán sau

Bài toán mới 2.23.

Với $x, y, z > 0$, chứng minh rằng

$$z \cdot \frac{x^2+y^2}{x+y} + x \cdot \frac{y^2+z^2}{y+z} + y \cdot \frac{z^2+x^2}{z+x} \leq x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.23)$$

Hay bài toán

Bài toán mới 2.24.

Với $x, y, z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x^2+y^2}{(x+y)xy} + \frac{y^2+z^2}{(y+z)yz} + \frac{z^2+x^2}{(z+x)zx} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}. \quad (2.24)$$

Mở rộng bài toán trên cho n biến ta được bài toán

Bài toán 2.25.

Với $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1+x_2)x_1x_2} + \frac{x_2^2+x_3^2}{(x_2+x_3)x_2x_3} + \dots + \frac{x_n^2+x_1^2}{(x_n+x_1)x_1x_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\prod_{i=1}^n x_i}. \quad (2.25)$$

Hướng biến đổi 4. Ta có

$$z(x-y) \left[\frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+z} \right] = \frac{z(x-y)^2}{(y+z)(x+z)}$$

Vậy với $x, y, z > 0$ ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{z(x-y)^2}{(y+z)(x+z)} + \frac{x(y-z)^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(z-x)^2}{(x+y)(y+z)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z(x-y) \left[\frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+z} \right] + x(y-z) \left[\frac{1}{x+z} - \frac{1}{x+y} \right] + y(z-x) \left[\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+z} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y} [y(z-x) - x(y-z)] + \frac{1}{y+z} [z(x-y) - y(z-x)] + \frac{1}{x+z} [x(y-z) - z(x-y)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y} [z(x+y) - 2xy] + \frac{1}{y+z} [x(y+z) - 2yz] + \frac{1}{z+x} [y(x+z) - 2xz] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{x+y+z}{2}$$

Từ đó ta có bài toán

Bài toán 2.26.

Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{x+y+z}{2}. \quad (2.26)$$

Mở rộng bài toán trên cho n biến ta được bài toán

Bài toán 2.27. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, Chứng minh rằng

$$\frac{x_1x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_2x_3}{x_2+x_3} + \dots + \frac{x_nx_1}{x_n+x_1} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.27)$$

Hướng biến đổi 5. Ta có

$$(x-y) \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) = \frac{(x+y)(x-y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Vậy với $x, y, z > 0$ ta có đẳng thức

$$\frac{(x+y)(x-y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{(y+z)(y-z)^2}{(1+y^2)(1+z^2)} + \frac{(z+x)(z-x)^2}{(1+z^2)(1+x^2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+x^2} \right] + (y-z) \left[\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+y^2} \right] + (z-x) \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} [(y+z) - 2x] + \frac{1}{1+y^2} [(z+x) - 2y] + \frac{1}{1+z^2} [(x+y) - 2z] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{x+z}{1+y^2} + \frac{x+y}{1+z^2} \leq \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2}$$

Bài toán 2.28.

Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$\frac{a^2 + bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2 + ac}{(a+c)^2} + \frac{c^2 + ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}. \quad (2.28)$$

Lời giải.

Biến đổi bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2 + ac}{(a+c)^2} + \frac{c^2 + ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a^2 + bc}{(b+c)^2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b^2 + ac}{(a+c)^2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{c^2 + ab}{(a+b)^2} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{2(b+c)^2} + \frac{2b^2 - a^2 - c^2}{2(a+c)^2} + \frac{2c^2 - b^2 - a^2}{2(a+b)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2(b+c)^2} [(a^2 - b^2) + (a^2 - c^2)] + \frac{1}{2(a+c)^2} [(b^2 - a^2) + (b^2 - c^2)] + \\ & + \frac{1}{2(a+b)^2} [(c^2 - b^2) + (c^2 - a^2)] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a^2 - b^2) \left[\frac{1}{2(b+c)^2} - \frac{1}{2(a+c)^2} \right] + (b^2 - c^2) \left[\frac{1}{2(a+c)^2} - \frac{1}{2(a+b)^2} \right] + \\ & + (c^2 - a^2) \left[\frac{1}{2(a+b)^2} - \frac{1}{2(b+c)^2} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

0

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(a+b+2c)}{2(b+c)^2(a+c)^2}(a-b)^2 + \frac{(b+c)(2a+b+c)}{2(a+b)^2(a+c)^2}(b-c)^2 + \frac{(a+c)(a+2b+c)}{2(a+b)^2(b+c)^2}(c-a)^2 \geq 0(**)$$

(**) luôn đúng với mọi số a, b, c dương

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

d) Xây dựng bất đẳng thức từ đẳng thức của hàm số

$$y = \frac{a.x + b}{c.x + d}$$

Bài toán 2.29

Với $a, b, c \in \mathbb{R}$ đôi một khác nhau, chứng minh rằng

$$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq -\frac{1}{4}. \quad (2.29)$$

Lời giải.

Ký hiệu

$$x = \frac{a+b}{a-b}, \text{ suy ra } x+1 = \frac{2a}{a-b}, x-1 = \frac{2b}{a-b}$$

$$y = \frac{b+c}{b-c}, \text{ suy ra } y+1 = \frac{2b}{b-c}, y-1 = \frac{2c}{b-c}$$

$$z = \frac{c+a}{c-a}, \text{ suy ra } z+1 = \frac{2c}{c-a}, z-1 = \frac{2a}{c-a}$$

Từ trên ta có được

$$(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1)$$

$$\text{Hay } 2(xy + yz + zx) = -2$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= (x+y+z)^2 + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-1 \end{cases}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 - 1 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 - 1 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 - 1 \geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{4ab}{(a-b)^2} + \frac{4bc}{(b-c)^2} + \frac{4ca}{(c-a)^2} \geq -1 \\ \Leftrightarrow & \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.30

Với $a, b, c \in \mathbb{R}$ đôi một khác nhau, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2. \quad (2.30)$$

Lời giải.

Ta có

$$P = \left(1 + \frac{a}{a-b}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{b-c}\right)^2 + \left(1 + \frac{c}{c-a}\right)^2$$

Đặt

$$x = \frac{a}{a-b} \text{ suy ra } x - 1 = \frac{b}{a-b}$$

$$y = \frac{b}{b-c} \text{ suy ra } y - 1 = \frac{c}{b-c}$$

$$z = \frac{c}{c-a} \text{ suy ra } z - 1 = \frac{a}{c-a}$$

Từ đó ta có

$$xyz = (x-1)(y-1)(z-1) \Leftrightarrow x+y+z = (xy+yz+zx)+1$$

Vậy

$$\begin{aligned}
P &= (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) + 3 \\
&= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + 2(x+y+z) + 3 \\
&= (x+y+z)^2 + 5
\end{aligned}$$

Suy ra $P \geq 5$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x+y+z=0$.

Vậy $\text{Min} P = 5$ khi và chỉ khi $x+y+z=0$ hay khi $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a} = 0$. **Nhận xét.**

Tương tự bài toán trên ta có thể có những bài toán tương tự Nếu

$$x = \frac{a}{b-c} \Rightarrow x+1 = \frac{a+b-c}{b-c}; \quad x-1 = \frac{a-b+c}{b-c}$$

$$y = \frac{b}{c-a} \Rightarrow y+1 = \frac{-a+b+c}{c-a}; \quad y-1 = \frac{a+b-c}{c-a}$$

$$z = \frac{c}{a-b} \Rightarrow z+1 = \frac{a-b+c}{a-b}; \quad z-1 = \frac{-a+b+c}{a-b}$$

Suy ra $(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1)$

Bài toán 2.31a.

Với $a, b, c \in \mathbb{R}$ đôi một khác nhau, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2. \quad (2.31a)$$

Từ (2.29) ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{2ab}{(a-b)^2} + \frac{2bc}{(b-c)^2} + \frac{2ca}{(c-a)^2} \geq -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 1 + \frac{2ab}{(a-b)^2} + 1 + \frac{2bc}{(b-c)^2} + 1 + \frac{2ca}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Từ đó ta được bài toán mới

Bài toán 2.31b.

Với $a, b, c \in \mathbb{R}$ đôi một khác nhau, chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2}. \quad (2.31b)$$

e) Xây dựng bất đẳng thức làm mạnh nhờ sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Nhờ sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c, \quad \forall a, b, c, > 0$$

Ta có thể xây dựng bất đẳng thức dạng mạnh hơn bất đẳng thức trên dạng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \alpha, \quad \forall a, b, c, > 0; \quad \alpha \geq 0$$

Vậy α là đại lượng được xác định như thế nào?

Hướng biến đổi 1. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{b} &= \frac{a^2}{b} - 2a + b \\ \frac{(b-c)^2}{c} &= \frac{b^2}{c} - 2b + c \\ \frac{(c-a)^2}{a} &= \frac{c^2}{a} - 2c + a \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a + b + c) \\ &= \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \\ &= \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(c-b)^2}{c} + \frac{(a-c)^2}{a} \end{aligned}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta được

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(c-b)^2}{c} + \frac{(a-c)^2}{a} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Từ đó ta có được bất đẳng thức mạnh hơn bất đẳng thức ban đầu có dạng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}, \quad \forall a, b, c, > 0;$$

Bằng cách xây dựng như trên ta có thể nhận được

$$\alpha = \frac{4(b-c)^2}{a+b+c}$$

hoặc

$$\alpha = \frac{4(c-a)^2}{a+b+c}.$$

Từ đó ta có được bài toán sau

Bài toán mới 2.32

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}. \quad (2.32)$$

Bài toán mới 2.33

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(b-c)^2}{a+b+c}. \quad (2.33)$$

Bài toán mới 2.34

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(c-a)^2}{a+b+c}. \quad (2.34)$$

Hướng biến đổi 2. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{a^2} &= 1 - \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \\ \frac{(b-c)^2}{b^2} &= 1 - \frac{2c}{b} + \frac{c^2}{b^2} \\ \frac{(c-a)^2}{c^2} &= 1 - \frac{2a}{c} + \frac{a^2}{c^2} \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} &\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + 3 - \left(\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \right) \\ &= \frac{(a-b)^2}{a^2} + \frac{(b-c)^2}{b^2} + \frac{(c-a)^2}{c^2} \\ &= \frac{(a-b)^2}{a^2} + \frac{(c-b)^2}{b^2} + \frac{(a-c)^2}{c^2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\frac{(a-b)^2}{a^2} + \frac{(c-b)^2}{b^2} + \frac{(a-c)^2}{c^2} \geq \frac{4(a-b)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Từ đó ta được bất đẳng thức mạnh hơn dạng

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + 3 \geq \left(\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \right) + \frac{4(a-b)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Vậy ta có được các bài toán sau

Bài toán mới 2.35

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + 3 \geq \left(\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \right) + \frac{4(a-b)^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.35)$$

Bài toán mới 2.36

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + 3 \geq \left(\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \right) + \frac{4(b-c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.36)$$

Bài toán mới 2.37

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + 3 \geq \left(\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \right) + \frac{4(c-a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2.37)$$

Hướng biến đổi 3. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{ab} &= \frac{a^2 + b^2}{ab} - 2 \\ \frac{(b-c)^2}{bc} &= \frac{b^2 + c^2}{bc} - 2 \\ \frac{(c-a)^2}{ca} &= \frac{c^2 + a^2}{ca} - 2 \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2}{ca} - 6 &= \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(c-b)^2}{bc} + \frac{(a-c)^2}{ca} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(c-b)^2}{bc} + \frac{(a-c)^2}{ca} \geq \frac{4(a-b)^2}{ab + bc + ca}$$

Từ đó ta có được bất đẳng thức dạng mạnh là

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2}{ca} \geq 6 + \frac{4(a - b)^2}{ab + bc + ca}$$

Từ đó ta có được các bài toán sau

Bài toán mới 2.38

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2}{ca} \geq 6 + \frac{4(a - b)^2}{ab + bc + ca}. \quad (2.38)$$

Bài toán mới 2.39

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2}{ca} \geq 6 + \frac{4(b - c)^2}{ab + bc + ca}. \quad (2.39)$$

Bài toán mới 2.40

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2}{ca} \geq 6 + \frac{4(c - a)^2}{ab + bc + ca}. \quad (2.40)$$

Hướng biến đổi 4. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a - 2b)^2}{a} &= a - 4b + \frac{4b^2}{a} \\ \frac{(b - 2c)^2}{b} &= b - 4c + \frac{4c^2}{b} \\ \frac{(c - 2a)^2}{c} &= c - 4a + \frac{4a^2}{c} \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} &\frac{4a^2}{c} + \frac{4b^2}{a} + \frac{4c^2}{b} - 3(a + b + c) \\ &= \frac{(a - 2b)^2}{a} + \frac{(b - 2c)^2}{b} + \frac{(c - 2a)^2}{c} \\ &= \frac{(a - 2b)^2}{a} + \frac{(2c - b)^2}{b} + \frac{(2a - c)^2}{c} \end{aligned}$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\frac{(a - 2b)^2}{a} + \frac{(2c - b)^2}{b} + \frac{(2a - c)^2}{c} \geq \frac{(3a - 3b + c)^2}{a + b + c}$$

Từ đó ta được bất đẳng thức dạng mạnh

$$\frac{4a^2}{c} + \frac{4b^2}{a} + \frac{4c^2}{b} \geq (a+b+c) + \frac{(3a-3b+c)^2}{a+b+c}$$

Vậy ta có được bài toán sau

Bài toán mới 2.41

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{4a^2}{c} + \frac{4b^2}{a} + \frac{4c^2}{b} \geq (a+b+c) + \frac{(3a-3b+c)^2}{a+b+c}. \quad (2.41)$$

Bài toán mới 2.42

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{4a^2}{c} + \frac{4b^2}{a} + \frac{4c^2}{b} \geq (a+b+c) + \frac{(a+3b-3c)^2}{a+b+c}. \quad (2.42)$$

Bài toán mới 2.43

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{4a^2}{c} + \frac{4b^2}{a} + \frac{4c^2}{b} \geq (a+b+c) + \frac{(3a+b-3c)^2}{a+b+c}. \quad (2.43)$$

Hướng biến đổi 5. Ta có thể làm mạnh bất đẳng thức bậc cao hơn như sau

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$\frac{X^4}{a} + \frac{Y^4}{b} + \frac{Z^4}{c} \geq \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2}{a+b+c}$$

Mặt khác ta lại có

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \geq \frac{1}{3}(X+Y+Z)^2$$

Từ đó ta có được bất đẳng thức

$$\frac{X^4}{a} + \frac{Y^4}{b} + \frac{Z^4}{c} \geq \frac{1}{9} \cdot \frac{(X+Y+Z)^4}{a+b+c}$$

Từ đó ta có được các bài toán sau

Bài toán mới 2.44

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^4}{a} + \frac{(b-c)^4}{b} + \frac{(c-a)^4}{c} \geq \frac{16}{9} \cdot \frac{(a-b)^4}{a+b+c}. \quad (2.44)$$

Bài toán mới 2.45

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^4}{a} + \frac{(b-c)^4}{b} + \frac{(c-a)^4}{c} \geq \frac{16}{9} \cdot \frac{(b-c)^4}{a+b+c}. \quad (2.45)$$

Bài toán mới 2.46

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^4}{a} + \frac{(b-c)^4}{b} + \frac{(c-a)^4}{c} \geq \frac{16}{9} \cdot \frac{(c-a)^4}{a+b+c}. \quad (2.46)$$

Bài toán mới 2.47

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^4}{a^2} + \frac{(b-c)^4}{b^2} + \frac{(c-a)^4}{c^2} \geq \frac{16}{9} \cdot \frac{(a-b)^4}{a^2+b^2+c^2}. \quad (2.47)$$

Bài toán mới 2.48

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^4}{ab} + \frac{(b-c)^4}{bc} + \frac{(c-a)^4}{ca} \geq \frac{16}{9} \cdot \frac{(a-b)^4}{ab+bc+ca}. \quad (2.48)$$

0.3.3 Khả năng áp dụng của giải pháp

Sáng kiến kinh nghiệm có tính khả thi cao và đã được áp dụng để dạy cho đội tuyển HSG lớp 10, lớp 11 của trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn và đội tuyển học sinh giỏi quốc gia môn Toán. Đề tài cũng có thể áp dụng cho học sinh các đội tuyển của các trường THPT trong toàn tỉnh và là tài liệu để bổ ích để trao đổi chuyên môn với các bạn đồng nghiệp.

0.3.4 Hiệu quả, lợi ích thu được

Qua thực tế giảng dạy cho các đội tuyển tôi nhận thấy các em đã biết vận dụng linh hoạt một số phương pháp, kĩ thuật làm mạnh bất đẳng thức vào từng bài toán cụ thể và tỏ ra rất hứng thú với những kĩ thuật này. Không những thế các em còn biết vận dụng lồng ghép các kĩ thuật để tạo ra nhiều bài tập khác nhau, áp dụng cho nhiều kiểu bài khác nhau, từ đó tạo ra nguồn bài tập phong phú cho quá trình ôn tập.

0.3.5 Phạm vi ảnh hưởng của giải pháp

Đề tài được triển khai góp phần tích cực trong việc nâng cao chất lượng học tập của học sinh các đội tuyển.

0.3.6 Kiến nghị đề xuất

Từ kết quả của sáng kiến này, ta thấy rằng từ các suy luận đơn giản, logic ta có thể xây dựng được một lớp các bất đẳng thức hay và lạ. Tác giả hy vọng với ý tưởng trên sẽ giúp cho độc giả xây dựng được nhiều bất đẳng thức khác làm phong phú thêm các bài toán bất đẳng thức vốn đã rất đa dạng.

Tác giả mong rằng sáng kiến sẽ được nhân rộng trong các trường THPT trong tỉnh để góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy bộ môn Toán.

Điện Biên, ngày 10 tháng 4 năm 2015.

NGƯỜI VIẾT SÁNG KIẾN

Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Kim Hùng (2006), “ *Sáng tạo bất đẳng thức*”, NXB Thống kê Hà Nội .
- [2] Phan Huy Khải (2001), “ *10 000 bài toán sơ cấp*” , NXB Hà Nội, Hà Nội.
- [3] Phan Huy Khải (2009), “ *Bất đẳng thức và ứng dụng*” , NXB Giáo Dục Việt Nam, Hà Nội.
- [4] Nguyễn Vũ Lương (chủ biên), Phạm Văn Hùng, Nguyễn Ngọc Thắng (2008), “*Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy*” , NXB Đại học quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [5] Nguyễn Vũ Lương (chủ biên), Nguyễn Ngọc Thắng (2009), “*Các bài giảng về bất đẳng thức Bunhiacopsi*” , NXB Đại học quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [6] Trần Phương (2011), “*Những con đường khám phá lời giải bất đẳng thức*”, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội .
- [7] Trần Phương (2012), “*Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học*”, NXB Tri thức, Hà Nội .
- [8] Tủ sách toán học và tuổi trẻ (2007), “*Các bài thi Olympic Toán*” , NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [9] Tài liệu từ Internet.