

SỬ DỤNG HÀM SỐ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ BẤT ĐỐI XỨNG

Tác giả: Hoàng Văn Thông
Đơn vị: THPT chuyên Lê Quý Đôn

A. Mục đích, sự cần thiết

Việc tạo ra một môi trường học tập có tính trải nghiệm, khám phá ở đó cần huy động tổng hợp kiến thức kỹ năng, tư duy để giải quyết các vấn đề phát sinh trong thực tế, trong học tập đang và sẽ là hướng đi mới của giáo dục theo định hướng phát triển toàn diện. Trong các trường chuyên, hướng đi này càng có nhiều cơ hội để thực hiện. Tuy nhiên rất cần sự vào cuộc thực sự của đội ngũ giáo viên, một trong những yếu tố quan trọng trong việc đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục.

Trong chương trình toán THPT, những vấn đề khó thường có số tiết phân phối trong chương trình không nhiều, lượng thời gian để nghiên cứu ít trong khi đó lại là những phần dùng để phân loại học sinh trong các kì kiểm tra, đánh giá học sinh đặc biệt là các kỳ thi chọn học sinh giỏi các cấp, thi tuyển sinh Đại học. Đa số học sinh cũng ít tìm hiểu những vấn đề này, chủ yếu là giảng dạy cho các học sinh giỏi trong các đội tuyển.

Với mục đích gợi ý cách vận dụng các kiến thức cơ bản để giải quyết các dạng toán khó trong chương trình Toán cấp THPT, cũng là hình thành một cách học tập chủ động cho học sinh. Đồng thời, tạo thêm nguồn học liệu tham khảo cho đồng nghiệp và học sinh khi tham gia giảng dạy và học, tôi chọn đề tài:

“ Sử dụng hàm số để giải các bài toán cực trị bất đối xứng ”.

B. Phạm vi triển khai

1) Đối tượng nghiên cứu:

- Mục tiêu, nội dung chương trình nâng cao và Toán chuyên THPT.
- Sách giáo khoa nâng cao và chuyên Toán.
- Các bài toán trong chương trình thi đại học và học sinh giỏi bậc THPT.
- Mức độ nhận thức của học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.

2)Phạm vi nghiên cứu:

- Chương trình nâng cao và chuyên toán THPT.
- Các chuyên đề thi đại học và học sinh giỏi quốc gia.
- Học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.

3)Tiến hành thực nghiệm trên:

- Đội tuyển HSG toán cấp tỉnh lớp 12.
- Chương trình ôn thi THPT Quốc gia lớp chuyên Toán 12C1.

C.Nội dung

1.Tình trạng giải pháp đã biết

Với bài toán cực trị ta có thể dùng phương pháp Đại số, Hình học, Giải tích để tiếp cận. Tuy nhiên, với phương pháp Đại số, Hình học đòi hỏi học sinh có một nền tảng kiến thức khá vững chắc và các công cụ hỗ trợ thường phức tạp.

Các khái niệm về Hàm số, đạo hàm, liên tục, Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất khá quen thuộc với học sinh lớp 12 vì trong chương trình có một thời lượng lớn cho phần này. Hơn nữa kỹ năng sử dụng lại đơn giản và quen thuộc với đa phần học sinh. Việc dùng hàm số để giải một số dạng bài toán cực trị là cách tiếp cận khá gần với tư duy, kỹ năng vốn có của học sinh. Tạo ra những hứng thú và thuận lợi khi nghiên cứu và vận dụng.

Ở đề tài “ Dùng hàm số để giải các bài toán cực trị bất đối xứng”,Tôi lựa chọn một số bài toán mà hình thức không có tính đối xứng đẹp, dựa trên sự phân tích ban đầu và đưa về một số hướng tiếp cận thường dùng. Trong khi thực hiện đề tài, tôi đã cố gắng chọn những ví dụ tiêu biểu, phân tích dấu hiệu của bài toán và đưa ra công cụ áp dụng hiệu quả cho ví dụ đó. Đồng thời cũng có thêm một số ví dụ tương tự để cho học sinh tự rèn luyện, khắc sâu kiến thức và kỹ năng.

2.Nội dung giải pháp

Trong sáng kiến này tôi lựa chọn một số các bài toán cực trị điển hình, phân dạng theo cách tiếp cận và đưa ra những công cụ thường dùng khi thực hiện giải các bài toán này.

2.1.Các bài toán xử lý theo tính đối xứng

Định hướng chung: Thường ta dùng những cách biến đổi sau

- + Biến đổi về biểu thức chứa các biến có tính đối xứng
- + Biến đổi về biến không đối xứng
- + Giảm biến bằng việc chia hoặc cho biến không đối xứng hoặc hai biến đối xứng.

Bài 1. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTLN của biểu thức

$$F = \sqrt{3x^2 + 7y} + \sqrt{5y + 5z} + \sqrt{7z + 3x^2}$$

Phân tích

Biểu thức F đối xứng theo hai biến y và z , trong trường hợp này ta chọn đưa về biến x thông qua đánh giá của BĐT Bunhiakovsky

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovsky ta có:

$$F^2 \leq 3[6x^2 + 12(y + z)] \leq 18[x^2 + 2\sqrt{2(y^2 + z^2)}] = 18[x^2 + 2\sqrt{2(3 - x^2)}]$$

Xét hàm số: $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2(3 - x^2)}$ trên miền xác định $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

$$f'(x) = 2x - \frac{4x}{\sqrt{2(3 - x^2)}} \text{ với mọi } -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$f'(x) = 0 \text{ trên } (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$$

$$f(\pm\sqrt{3}) = 3, f(0) = 2\sqrt{6}, f(\pm 1) = 5$$

$$\Rightarrow \max f(x) = 5 \Rightarrow F^2 \leq 18.5 = 90 \Rightarrow F \leq 3\sqrt{10}$$

Vậy $\max F = 3\sqrt{10}$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài 2. Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + xz + yz).$$

Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \sqrt{2(x + y + z)} - (y^2 + z^2)$$

Phân tích

Biểu thức P đối xứng theo hai biến y và z . Từ giả thiết của bài toán ta tìm được mối liên hệ giữa biến x với hai biến y và z . Từ đó ta định hướng biến đổi toàn bộ biểu thức P theo hai biến y và z

Lời giải

Từ điều kiện ta có

$$5x^2 - 6x(y+z) = 6yz - 5(y^2 + z^2)$$

Sử dụng hai bất đẳng thức quen thuộc

$$yz \leq \frac{1}{4}(y+z)^2$$

$$-(y^2 + z^2) \leq -\frac{1}{2}(y+z)^2$$

Suy ra

$$5x^2 - 6x(y+z) \leq \frac{3}{2}(y+z)^2 - \frac{5}{2}(y+z)^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 6x(y+z) + (y+z)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq y+z$$

Do đó

$$P \leq 2\sqrt{y+z} - \frac{1}{2}(y+z)^2 = 2t - \frac{1}{2}t^2 \quad \text{với } t = \sqrt{y+z} \geq 0$$

$$\text{Khảo sát hàm } f(t) \text{ ta có } f(t) \leq f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow P \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy, GTLN của P bằng } \frac{3}{2} \text{ khi } x=1, y=z=\frac{1}{2}$$

Bài 3. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \sqrt{\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}}$$

Phân tích:

Ta thấy P đối xứng với b và c. Ta tìm cách đưa P về chung một biểu thức hay ta thực hiện việc dồn biến. Một trong những cách đơn giản nhất là chia cho một biến.

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(b+c)^2}{2bc+a(b+c)} \\ &\geq \frac{(b+c)^2}{\frac{(b+c)^2}{2} + a(b+c)} = \frac{2}{1 + \frac{2a}{b+c}} \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{a}{b+c}, t > 0$.

Khi đó ta xét hàm $f(t) = t + \sqrt{\frac{2}{2t+1}}, t > 0$

$$f'(t) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{(2t+1)\sqrt{(2t+1)}} = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$
$$\Rightarrow \text{Min}P = f\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$$

Bài tập tương tự:

1) Cho các số thực dương a, b, c. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2$$

2) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b, a \geq c$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{a}{5(a+b+c)} + \frac{b}{5a-2c} + \frac{c}{5a-2b}$$

Bài 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = 6(a+b-c) + 27abc.$$

Phân tích:

Biểu thức P có tính đối xứng theo hai biến b và c. Trong trường hợp này ta sẽ dùng các biến đổi để đưa về biến c.

Lời giải

Ta có

$$a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} = \sqrt{2(1-c^2)}$$

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{1-c^2}{2}$$

$$\text{Do đó: } P \leq 6\sqrt{2(1-c^2)} + \frac{15}{2}c - \frac{27}{2}c^3 = f(c).$$

Xét hàm số $f(c)$ với $c \in (0;1)$, ta có:

$$f'(c) = \frac{-12c}{\sqrt{2(1-c^2)}} - 6 + \frac{27}{2} - \frac{82}{2}c^2 = \frac{15}{2} - \frac{81}{2}c^2 - \frac{12c}{\sqrt{2(1-c^2)}}$$

$$\text{Suy ra, } f'(c) = 0 \Leftrightarrow 5 - 27c^2 = \frac{8c}{\sqrt{2(1-c^2)}} \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}.$$

Mà $\lim_{c \rightarrow 0} f(c) = 6\sqrt{2}$; $\lim_{c \rightarrow 1} f(c) = -6$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = 10$ nên suy ra :

$$\max_{(0;1)} f(c) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 10 \Rightarrow P \leq 10.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi : } \begin{cases} a = b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 5. Cho $x, y, z \in [1;3]$. Tìm GTNN của biểu thức

$$T = \frac{25(z+y)^2}{12x^2 + 2012(xy+xz+yz)}$$

Phân tích:

Ta thấy biểu thức T đối xứng theo y và z. Trong bài này ta lại tìm cách đưa về biểu thức chứa y và z

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012x(y+z) + 2012 \frac{(y+z)^2}{4}} \\ &\geq \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012x(y+z) + 503(y+z)^2} \end{aligned}$$

Xét hàm $m(x) = 12x^2 + 2012x(y+z) + 503(y+z)^2$, $x \in [1;3]$,

có $m'(x) = 24x + 2012(y+z) > 0$, $\forall x \in [1;3]$.

Do đó $m(x)$ đồng biến trên $[1;3]$, suy ra $T(x)$ nghịch biến trên $[1;3]$.

Suy ra $T(x) \geq T(3) = \frac{25t^2}{108 + 6036t + 503t^2} = f(t)$, với $t = y + z \in [2; 6]$.

Lại có $f(t) = \frac{150900t^2 + 540t}{(108 + 6036t + 503t^2)^2} > 0, \forall t \in [2; 6]$.

nên $f(t)$ đồng biến trên $[2; 6]$, và do đó $f(t) \geq f(2) = \frac{25}{3548}$.

Cuối cùng $\min T = \frac{25}{3548}$ khi $x = 3; y = z = 1$.

Bài 6. Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$. Tìm

GTNN biểu thức

$$P = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Phân tích:

Trong trường hợp này, tính đối xứng chỉ xuất hiện đối với hai biến a và b .

Ta lại dùng cách giảm biến bằng thủ thuật chia cho một biến để giảm biến.

Lời giải

Giả thiết tương đương với $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1$

Đặt $\left(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right) \rightarrow (x, y)$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 0 < x + y \leq \sqrt{2}$$

$$P = (x + y + 1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1 \right) \geq (x + y + 1) \left(\frac{4}{x + y} + 1 \right) = (t + 1) \left(\frac{4}{t} + 1 \right) = f(t)$$

Khảo sát $f(t)$ trên $(0; \sqrt{2})$ ta được $\min f(t) = 5 + 3\sqrt{2}$ tại $t = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = b = \sqrt{2}c$$

Bài tập tương tự. Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$.

Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \left(a + b + \frac{25c}{2} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 7. Cho các số thực thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c; a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = 3abc - 2014a - b - c$$

Phân tích

Ta dùng BĐT Bunhiakovsky để chuyển toàn bộ biểu thức P theo biến a

Lời giải

Ta có

$$P \geq 3a^3 - 2014a - \sqrt{2(b^2 + c^2)}$$

Suy ra

$$P \geq f(a) = 3a^3 - 2014a - \sqrt{6 - 2a^2}, a \in [0;1]$$

Do

$$f'(a) = 9a^2 - 2014 + \frac{2a}{\sqrt{6 - 2a^2}} < 0, (do: 0 \leq a \leq 1)$$

Suy ra : $P \geq f(1) = -2013$

Vậy GTNN của P bằng -2013 khi $a = b = c = 1$

Bài 8. Cho $x, y, z \in (0;1]$ thỏa mãn $x + y - z \geq 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$B = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{xy+z^2}$$

Phân tích

Ta đánh giá biểu thức P theo hai biến đối xứng x và y, coi z là tham số

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $x + y - z \geq 1 \Leftrightarrow x + y \geq 1 + z$

Ta có

$$B = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{xy+z^2} = \frac{x^2}{x(y+z)} + \frac{y^2}{y(z+x)} + \frac{z}{xy+z^2}$$

Áp dụng Cauchy-Schwarz ta có: $B \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+z(x+y)} + \frac{z}{xy+z^2} \quad (1)$

Đặt $t = x + y$, theo giả thiết ta có: $1 + z \leq t \leq 2$ và $xy \leq \frac{t^2}{4}$ (2)

Theo (1) và (2) ta suy ra được: $B \geq \frac{2t^2}{t^2 + 2zt} + \frac{4z}{t^2 + z^2} = f(t)$

Xét hàm $f(t)$ trên $[1 + z; 2]$ ta có

$$f'(t) = 4zt \left[\frac{t}{(t^2 + 2zt)^2} - \frac{2}{(t^2 + 4z^2)} \right], \text{ mặt khác do } t \geq z + 1 \text{ và } z \leq 1 \text{ nên } 2zt \geq 4z^2$$

suy ra $\frac{t}{(t^2 + 2zt)^2} \leq \frac{2}{t^2 + 4z^2} \Rightarrow$ hàm $f(t)$ nghịch biến với mọi $t \in [z + 1; 2] \Rightarrow$

$$f(t) \geq f(2) = \frac{2}{1 + z} + \frac{z}{z^2 + 1} = g(z)$$

Khảo sát hàm $g(z)$ trên $(0; 1]$ ta có: $g'(z) = -\frac{2}{(1 + z)^2} + \frac{1 - z^2}{(z^2 + 1)^2} \leq 0$ với

mọi $z \in (0; 1]$. Suy ra, hàm $g(z)$ nghịch biến trên $(0; 1]$

$$\text{Suy ra, } g(z) \geq g(1) = \frac{3}{2}$$

Vậy, $\min B = \frac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài tập tương tự: Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 3]$ và

$x + y + 2z = 6$. Tìm GTLN của biểu thức :

$$P = x^3 + y^3 + 5z^3$$

Bài 9. Cho x, y, z dương thỏa mãn $xy \geq 1, z \geq 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x}{y + 1} + \frac{y}{x + 1} + \frac{z^3 + 2}{3(xy + 1)}$$

Phân tích

Do P đối xứng theo tổng và tích của x và y . Ta tìm cách khử biến z thông qua việc sử dụng giả thiết của z .

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$(z - 1)^3 \geq 0 \Leftrightarrow z^3 + 2 \geq 3(z^2 - z + 1) \geq 3z$$

Do đó:

$$P \geq \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{z}{xy+1} \geq \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{xy+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$P \geq \frac{(x+y+1)^2}{3xy+x+y+1}$$

Mặt khác:

$$\left(\frac{x+y+1}{3}\right)^3 \geq xy \Leftrightarrow \frac{(x+y+1)^3}{9} \geq 3xy$$

Do đó:

$$P \geq \frac{9(x+y+1)^2}{(x+y+1)^3 + 9(x+y+1)} = \frac{9(x+y+1)}{(x+y+1)^2 + 9}$$

Đặt: $x+y+1=t$ với $(t \geq 3)$. Khi đó: $P \geq \frac{9t}{t^2+9}$

Ta có: $P' = \frac{-9t^2+81}{(t^2+9)^2} = 0 \Leftrightarrow t=3$

Khảo sát hàm số ta có: $\min P = \frac{3}{2}$ khi $t=3$ hay $x=y=z=1$

2.2. Các bài toán xử lý theo tính chất đồng bậc

Định hướng chung: Với các biểu thức có tính đồng bậc ta thường chia cho một biến nào đấy hoặc dùng tham số trung gian tức là biểu diễn các biến theo một biến với tham số t .

Bài 1 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Tìm

GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Phân tích:

Ta thấy cả giả thiết và biểu thức cần tìm cực trị đều đồng bậc, đối xứng theo a và b . Ta dùng một cách biến đổi thông thường nhất là biểu diễn hết qua một biến thông qua các tham số trung gian

Lời giải

Đặt : $a = cx, b = cy, (x, y \geq 1)$

Từ giả thiết ta có : $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x + y = xy$

Khi đó

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{1+x} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{x^2+y^2+x+y}{xy+x+y+1} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2}$$

Lại đặt : $x + y = xy = t, (do : x, y \geq 1 \Rightarrow t \geq 4)$

Khi đó

$$P = f(t) = \frac{t^2-t}{2t+1} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2-2t}, t \geq 4$$

$$\Rightarrow P = f(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4(2t+1)} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2(t-2)}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2t+1)^2} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2(t-2)^2} \geq \frac{281}{864} > 0, (t \geq 4)$$

$$\Rightarrow \min f(t) = f(4) = \frac{41}{24} \text{ khi } t = 4 \Rightarrow x = y = 2 \Rightarrow a = b = 2c$$

Vậy $\min P = \frac{41}{24}$ khi : $a = b = 2c$.

Bài 2. Cho a, b, c dương thỏa mãn: $a^3 + b^3 = 64c^3$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{c^2}{(a+c)(c+b)} + \frac{ab}{c(a+b)}$$

Phân tích

Biểu thức đồng bậc và đối xứng theo biến a và b nên ta chuyển hết về biến c thông qua tham số các tham số.

Lời giải

Đặt $a = cx, b = cy$

Ta có

$$x^3 + y^3 = 64 \Rightarrow 2xy\sqrt{xy} \leq x^3 + y^3 = 64 \Rightarrow 0 < \sqrt{xy} \leq 2\sqrt[3]{4}$$

Khi đó

$$P = \frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{xy+x+y+1} + \frac{xy}{x+y}$$

Áp dụng BĐT Cauchy :

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow P \leq \frac{1}{xy+2\sqrt{xy}+1} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{(\sqrt{xy}+1)^2} + \frac{\sqrt{xy}}{2}$$

Suy ra

$$P \leq f(t) = \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{t}{2}, (t = \sqrt{xy})$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trên miền $t \in (0; 2\sqrt[3]{4}]$

$$\Rightarrow \text{Max} f(t) = f(2\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{4} + \frac{1}{(2\sqrt[3]{4}+1)^2}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \sqrt[3]{4} + \frac{1}{(2\sqrt[3]{4}+1)^2}. \text{ Khi : } a=b=2c\sqrt[3]{4}$$

2.3. Các bài toán khác

Định hướng chung: Tư tưởng chính là đưa về cùng một biểu thức thông qua các đánh giá. Có thể đó là một bất đẳng thức phụ.

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{1}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{2}{\sqrt{a+b+c}}$$

Phân tích:

Phân thức đầu tiên đã khiến ta nghĩ ngay đến BDT Cauchy, ta cần vận dụng thích hợp để đưa mẫu thức xuất hiện $a+b+c$ để giống phân thức còn lại, từ đó mở ra hướng làm:

Lời giải

Ta có

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot 2b} \leq \frac{a}{4} + b$$

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{a}{4} \cdot b \cdot 4c} \leq \frac{a}{12} + \frac{b}{3} + \frac{4}{3}c$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a + b + c)$$

Do đó

$$P = \frac{3}{4(a+b+c)} - \frac{2}{\sqrt{a+b+c}}$$

Đặt $a+b+c=t$ ta đưa về khảo sát hàm $f(t) = \frac{3}{4t} - \frac{2}{\sqrt{t}}$ ta được:

$$\min P = -\frac{4}{3}$$

Từ đây suy ra đẳng thức xảy ra khi $a=4b=16c$

Bài tập tương tự: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Bài 2. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} = 5$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = 2x^3 + y^3 + z^3$$

Phân tích

Muốn đưa về một biến tức là ta phải so sánh được các biến còn lại với biến đó. Trong giả thiết chưa căn thức vậy phải có một công cụ cho phép xử lý được hết với cả ba căn này. Hay cần một bất trung gian chuyển hết chúng vào trong một căn.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b}$

Đẳng thức xảy ra khi $ab=0$

Áp dụng ta có

$$5 = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} \geq \sqrt{1+x^2} + 1 + \sqrt{1+2y+2z} \\ \geq 2 + \sqrt{1+x^2+2y+2z}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2(y+z) \leq 8 \Rightarrow y+z \leq \frac{8-x^2}{2}$$

$$\text{Xét } P = 2x^3 + y^3 + z^3 \leq 2x^3 + (y+z)^3 \leq 2x^3 + \left(\frac{8-x^2}{2}\right)^2 = f(x)$$

$$\text{Đến đây khảo sát hàm số trên } [0, 2\sqrt{2}] \Rightarrow f(x) \leq 64$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } (x, y, z) = (0, 0, 4) = (0, 4, 0)$$

Bài 3. Cho x, y, z thỏa

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \leq 2(x+y+z)$$

Tìm GTNN của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + 2z + \frac{40}{\sqrt{y+z+1}} + \frac{40}{\sqrt{x+3}}$$

Phân tích

Muốn sử dụng giả thiết thì trong biểu thức P phải có các phép toán giống như vậy. Đòi hỏi ta phải gộp căn lại, BĐT Bunhiakovsky cho phép làm điều đó.

Lời giải

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Ta có

$$P = x^2 + y^2 + 2z + \frac{40}{\sqrt{y+z+1}} + \frac{40}{\sqrt{x+3}} \\ \geq x^2 + y^2 + 2z + 40 \frac{4}{\sqrt{y+z+1} + \sqrt{x+3}} \\ \geq x^2 + y^2 + 2z + 160 \frac{1}{\sqrt{2(x+y+z+4)}} \\ \geq \frac{(x+y)^2}{2} + 2z + 160 \frac{1}{\sqrt{2(x+y+z+4)}}$$

Mặc khác ta cũng có điều kiện bài toán trở thành :

$$(x+y)^2 + z^2 \leq 2(x+y) + 2z$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y+z)^2}{2} \leq 2(x+y+z) \Rightarrow x+y+z \leq 4$$

Vậy nên ta sẽ tìm cách để đánh giá : $x^2 + y^2 + 2z \geq f(x+y+z)$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức AG – MG ta có :

Thành ra ta có :

$$P \geq 2(x+y+z) - 2 + 160 \frac{2}{\sqrt{8(x+y+z+4)}}$$

$$\geq 2(x+y+z) - 2 + \frac{640}{x+y+z+12}$$

Ta xét : $f(t) = 2t - 2 + \frac{640}{t+12}, 0 \leq t \leq 4 \Rightarrow f'(t) = 2 - \frac{640}{(t+12)^2} < 0$ suy ra

hàm nghịch biến : $P \geq f(t) \geq f(4) = 46 \Leftrightarrow x = y = 1, z = 2$

Bài tập tương tự: Cho ba số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = x + y + z$.

Tìm GTNN của biểu thức

$$P = x + y + z + \frac{10}{\sqrt{x+y}} + \frac{10}{\sqrt{z+1}}$$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Phân tích

Do không có giả thiết tức là không thể dồn biến được. Vậy bắt buộc phải đưa về biểu thức chứa ba biến. Khi đó phân thức thứ hai cần biến đổi.

Lời giải

Ta có :

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq (a+b) \frac{a+b+4c}{2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab + 4ac + 4bc}{2}$$

$$\leq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Đặt $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4} \Rightarrow t > 2$

$$\text{Nên } P \leq \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2 - 4)}$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2 - 4)} \text{ với } t > 2$$

$$\text{có } f'(t) = \frac{(4-t)(4t^3 + 7t^2 - 4t - 16)}{t^2(t^2 - 4)^2}$$

$$\text{Do } t > 2 \text{ nên } 4t^3 + 7t^2 - 4t - 16 = 4(t^3 - 4) + t(7t - 4) > 0$$

$$\text{Nên } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$$\text{Lập bảng biến thiên } \Rightarrow P \leq \frac{5}{8}$$

$$\text{Vậy GTLN của } P = \frac{5}{8} \Leftrightarrow a = b = c = 2$$

Bài 5. Xét các số thực dương x, y, z thuộc đoạn $[1; 9]$ thỏa mãn $x \geq y, x \geq z$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

Phân tích

Các phân thức bậc nhất ở mẫu có rất nhiều kết quả để sử dụng, nhưng lại yêu cầu tử là hằng số giống nhau. Gợi ý cho ta chia các biến trên tử của các phân số.

Lời giải

Ta có

$$P = \frac{1}{1+2\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}$$

$$\text{Đặt } a = \frac{y}{x}; b = \frac{z}{y}; c = \frac{x}{z} \Rightarrow abc = 1; a, b, c \in \left[\frac{1}{9}; 9\right]$$

Khi đó P viết lại thành :

$$P = \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

$$\geq \frac{1}{1+2a} + \frac{2}{1+\sqrt{bc}} = \frac{1}{1+\frac{2}{bc}} + \frac{2}{1+\sqrt{bc}} = \frac{bc}{bc+2} + \frac{2}{1+\sqrt{bc}}$$

Đặt $t = \sqrt{bc}; t \in [1, 9]$

Xét hàm rồi lấy đạo hàm

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực tùy ý thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A = (xy + yz + 2zx)^2 - \frac{8}{xy + yz + 2zx - 1}$$

Phân tích

Biểu thức A đã quá đẹp cho việc khảo sát hàm, chỉ có cái khó là tìm điều kiện của ẩn phụ định đặt mà thôi.

Lời giải

Biến đổi giả thiết, vì $0 \leq (x + y + z)^2 = 1 + 2(xy + yz + zx)$ nên

$$xy + yz + 2zx \geq -\frac{1}{2} + xz \geq \frac{-1}{2} - \frac{x^2 + z^2}{2} = -1 + \frac{y^2}{2} \geq -1$$

Đẳng thức này xảy ra khi $y=0$ và $x=-z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Xét $f(t) = t^2 - \frac{8}{t-1}$ với $t = xy + yz + 2zx, t \geq -1$ ta có

$$f'(t) = \frac{8 + 2t^3 - 4t^2 + 2t}{(t-1)^2} \geq 0 \quad (\text{với } t \geq -1)$$

Vậy $f(t) \geq f(-1) = 5$

Vậy $P_{\min} = 5$ khi $y=0$ $x=-z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 7. Cho các số thực $a, b, c \in [1, 2]$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{10a}{bc} + \frac{11b}{ca} + \frac{2012c}{ab}$$

Phân tích

Với giả thiết của bài toán ta có thể dùng hàm khảo sát riêng từng biến độc lập.

Lời giải

Ta có

$$P = f(c) = \frac{2012c}{ab} + \frac{1}{c} \left(\frac{10a}{b} + \frac{11b}{a} \right)$$

Coi c là biến số; a, b là tham số; ta có:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{2012}{ab} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{10a}{b} + \frac{11b}{a} \right) \\ &= \frac{2012c^2 - 10a^2 - 11b^2}{ab} \geq \frac{2012 - 10 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2^2}{ab} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(c) \leq f(2) = \frac{4024}{ab} + \frac{5a}{b} + \frac{11b}{2a} = g(a)$$

Coi a là biến số; b là tham số; ta có:

$$g'(a) = \frac{-4024}{ba^2} + \frac{5}{b} - \frac{11b}{2a^2} \leq \frac{-4024}{2^3} + 5 - \frac{11}{4 \cdot 2} < 0$$

$$\Rightarrow g(a) \leq g(1) = \frac{4029}{b} + \frac{11b}{2} = h(b)$$

$$h'(b) = \frac{-4029}{b^2} + \frac{11}{2} \leq 0 (b \in [1; 2]) \Rightarrow h(b) \leq h(1) = 4029 + \frac{11}{2} = \frac{8069}{2}$$

$$\text{Vậy, } \text{Max} P = \frac{8069}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Bài 8. Cho $x, y \geq 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$K = \frac{2y}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Phân tích

Biểu thức K có biến y xuất hiện khá nhiều ý tưởng ở đây là khử biến x thông qua các đánh giá.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $0 \leq x, y \leq 1$

$$\text{Do đó } K = \frac{2y}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \geq \sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\text{Đặt } f(y) = \sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ với } y \in [0;1]$$

$$\text{Ta có } f'(y) = \sqrt{2} - \frac{y}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}} = \frac{\sqrt{2}(1+y^2)\sqrt{1+y^2} - y}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}} \geq \frac{\sqrt{2}-y}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}} > 0$$

với $\forall y \in (0;1)$

Suy ra $f(y)$ đồng biến trên $(0;1)$

Mà $f(y)$ liên tục trên $[0;1]$

Suy ra $f(y) \geq f(0) = 1$

Vậy $\min K = 1$ khi $x=1; y=0$

Bài 9. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$$

Phân tích

Biểu thức P đối xứng theo x và z, đồng thời có tính đồng bậc. ta giảm biến thông qua phép chia cho các biến phù hợp.

Lời giải

Sử dụng giả thiết $x^2 + y^2 + z^2$ kết hợp CS, ta có:

$$\begin{cases} \frac{xy}{1+z^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2z^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{x^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^2 + z^2} \right) \\ \frac{yz}{1+x^2} = \frac{yz}{2x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{z^2}{x^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \end{cases}$$

Suy ra:

$$\frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \left(2 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2} \right)$$

Vậy:

$$P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \left(2 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{y^3}{x^3} + \frac{y^3}{z^3} \right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{48} \left[\left(\frac{3y^2}{x^2} - \frac{2y^3}{x^3} \right) + \left(\frac{3y^2}{z^2} - \frac{2y^3}{z^3} \right) \right]$$

Xét hàm số:

$$f(t) = 3t^2 - 2t^3; \quad t > 0$$

Ta có: $f'(t) = 6t - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$.

Lập BBT, ta tìm được GTLN của $f(t)$ đạt được khi $t = 1$. Khi đó, $f(t) = 1$.

Từ đây suy ra: $P \leq \frac{5}{12}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Khả năng áp dụng của giải pháp

Nội dung của sáng kiến dùng để giảng dạy cho đội tuyển HSG cấp tỉnh lớp 12, các lớp ôn thi Đại học với đối tượng là học sinh Khá giỏi. Đồng thời là tài liệu tham khảo cho các học sinh có khả năng tự học tốt.

4. Hiệu quả, lợi ích thu được

Qua việc giảng dạy thực nghiệm trên đội tuyển HSG cấp tỉnh môn Toán lớp 12, ôn tập trên lớp 12C1 chuyên toán cho thấy học sinh tiếp thu được nội dung của đề tài, hiểu được cách tiếp cận và các công cụ hỗ trợ khi giải quyết các bài toán. Học sinh đã hình thành được tư duy phân tích và chọn hướng xử lý các bài toán cực trị có hình thức không đối xứng và đã vận dụng được cả sang các bài toán cực trị đối xứng khác.

Trong thời gian nghiên cứu, viết và triển khai đề tài trình độ chuyên môn bản thân cũng đã được nâng lên đáng kể bằng việc tư duy, so sánh các phương pháp trong cùng một đối tượng từ đó hình thành thêm phản xạ và kỹ năng phân tích mới hỗ trợ cho công tác giảng dạy và tự nghiên cứu.

5. Phạm vi ảnh hưởng của giải pháp

Nội dung của sáng kiến góp phần cung cấp thêm nguồn tài liệu tham khảo cho giáo viên và học sinh. Đồng thời cũng là gợi ý để các đồng nghiệp khác phát triển, tìm tòi và bổ sung thêm các hướng tiếp cận có hiệu quả cao hơn.

Việc nội dung của sáng kiến được học sinh tiếp thu hiệu quả gợi ý cho việc mở rộng ra các dạng toán khác và cải tiến để giảng dạy cho học sinh có nhận thức khá, giỏi của các lớp.

6.Kiến nghị, đề xuất

Nội dung của sáng kiến được trao đổi trong các đợt sinh hoạt, bồi dưỡng chuyên môn để hoàn thiện và nhân rộng trong hoạt động giảng dạy bộ môn Toán trong toàn tỉnh.