

PHỤ LỤC

	Trang
1. Sự cần thiết, mục đích của việc thực hiện sáng kiến kinh nghiệm.....	2
2. Phạm vi triển khai thực hiện.....	2
3. Mô tả sáng kiến.....	3
3.1. Đặt vấn đề.....	3
3.2. Giải quyết vấn đề.....	3
4. Kết quả và hiệu quả mang lại.....	18
5. Đánh giá về phạm vi ảnh hưởng của sáng kiến.....	18
6. Kiến nghị, đề xuất.....	19
7. Tài liệu tham khảo.....	20

SỬ DỤNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Tác giả: Phạm Hà Định
Giáo viên THPT chuyên Lê Quý Đôn

1. Sự cần thiết, mục đích của việc thực hiện sáng kiến:

- Nhiệm vụ chủ yếu của trường THPT chuyên Lê Quý Đôn là đào tạo học sinh mũi nhọn và đào tạo nguồn nhân lực có chất lượng cao cho tỉnh nhà. Đứng trước nhiệm vụ đó, đòi hỏi người giáo viên luôn phải đổi mới phương pháp dạy học, nhằm đáp ứng yêu cầu của việc dạy và học hiện nay.

- Trong chương trình toán THPT, số tiết trong phân phối chương trình để giảng dạy các bài toán đại số tổ hợp khai thác về nhị thức Niu-ton là rất ít. Một số phương pháp giải các bài toán này được đề cập trong sách giáo khoa cũng chỉ ở mức độ đơn giản, chưa đáp ứng được mức độ của các bài toán này trong các đề thi tuyển sinh đại học và thi chọn học sinh giỏi các cấp.

Nhằm giúp học sinh vận dụng được đạo hàm và tích phân để giải các bài toán đại số tổ hợp, chuẩn bị tốt cho kì thi tuyển sinh đại học và chọn học sinh giỏi các cấp, tôi chọn đề tài:

“ Sử dụng đạo hàm và tích phân để giải các bài toán đại số tổ hợp ” với mong muốn giúp các em học sinh có được một hệ thống các phương pháp “đủ mạnh” giải quyết các bài toán trên và tích lũy thêm phương pháp giải các dạng toán khác đồng thời tăng khả năng tư duy logic và rèn luyện tính sáng tạo cho các em. Giúp các em có tác phong độc lập khi giải toán. Đứng trước một bài toán có thể chủ động, linh hoạt, biết đặt ra các câu hỏi và tìm ra câu trả lời thích hợp để giải quyết các bài toán một cách trọn vẹn.

2. Phạm vi triển khai thực hiện:

- Đối tượng nghiên cứu:
- + Mục tiêu, nội dung chương trình nâng cao và Toán chuyên THPT.
- + Sách giáo khoa nâng cao và chuyên Toán.
- + Các bài toán trong chương trình thi đại học và học sinh giỏi bậc THPT.

- + Mức độ nhận thức của học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.
- Phạm vi nghiên cứu:
- + Chương trình nâng cao và chuyên toán THPT.
- + Các chuyên đề thi đại học và học sinh giỏi quốc gia.
- + Học sinh trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.
- Tiến hành thực nghiệm trên lớp: 12C4, 12C3.

3. Mô tả sáng kiến:

3.1 Đặt vấn đề

Đạo hàm và tích phân là một công cụ khá hữu hiệu để giải quyết một số bài toán của đại số tổ hợp đặc biệt là các bài toán khai thác về nhị thức Niu-tơn.

3.2 Giải quyết vấn đề

3.2.1 Cơ sở lí luận và thực tiễn

a) Cơ sở lí luận:

Nhị thức Niu-tơn

Cho n là số nguyên dương, a và b là hai số thực.

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Nhận xét:

- Trong khai triển $(a + b)^n$ có $n + 1$ số hạng.
- Tổng số mũ của a và b trong mỗi số hạng của khai triển bằng n .
- Các hệ số của các số hạng có tính chất đối xứng: $C_n^k = C_n^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n$.
- Nếu sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của a thì số hạng tổng quát thứ $k + 1$ trong khai triển là $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Chú ý:

- 1) $(a - b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + (-1)^n C_n^n b^n$
- 2) $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$
- 3) $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$
- 4) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$
- 5) $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$

Ta sẽ gọi hàm số $y = (x+1)^n$ và $y = (x-1)^n$ là hàm đa thức cơ bản.

b) Cơ sở thực tiễn – Thực trạng đối tượng nghiên cứu

Mặc dù các bài toán của đại số tổ hợp về nhị thức Niu-ton là các bài toán quen thuộc đối với học sinh THPT, nhưng ngoài những dạng bài cơ bản mà các em đã được học, các em vẫn còn lúng túng và chưa có hướng giải quyết đối với rất nhiều bài toán tính tổng, chứng minh các đẳng thức hoặc giải các phương trình có liên quan đến khai triển nhị thức Niu-ton. Khó khăn nhất đối với các em học sinh là đứng trước một bài toán phải lựa chọn được phương pháp giải hiệu quả. Khả năng hệ thống, tổng hợp, sâu chuỗi kiến thức và phương pháp của các em học sinh còn nhiều hạn chế.

Trong quá trình giảng dạy thực tế tôi đã phân loại các dạng bài của đại số tổ hợp với những dấu hiệu để có thể chọn được phương pháp phù hợp và hiệu quả nhất giúp các em có thể xác định được hướng giải quyết trong các bài toán đại số tổ hợp, đặc biệt các bài toán có liên quan đến nhị thức Niu-ton.

3.2.2 Giải pháp thực hiện:

1. Sử dụng đạo hàm để giải các bài toán đại số tổ hợp:

Các dấu hiệu nhận biết sử dụng phương pháp đạo hàm

Nếu trong tổng dãy tổ hợp, các số hạng chứa các nhân tử: $1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots$ hoặc các nhân tử: $1.2; 2.3; 3.4; \dots; (n-1)n; \dots$ và các nhân tử được xếp theo thứ tự tăng hoặc giảm đều theo một quy luật nào đó, ta nghĩ tới việc sử dụng đạo hàm. Khi đó, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm hàm (nhị thức Niu-ton) thích hợp.

Bước 2: Lấy đạo hàm cả hai vế (vế chưa khai triển nhị thức Niu-ton và vế đã khai triển)

Bước 3: Cho x nhận giá trị thích hợp và dẫn đến kết luận.

Sau đây là một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tính các tổng sau:

a) $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n.$

b) $S_2 = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \dots + k(-1)^{k-1}C_n^k + \dots + n(-1)^{n-1}C_n^n$

Phân tích: Ta thấy mỗi số hạng của tổng S_1 có dạng: kC_n^k . Để có được mỗi số hạng này ta có thể thực hiện phép toán đạo hàm: $(C_n^k x^k)' = kC_n^k x^{k-1}$ rồi thay giá trị $x=1$. Như vậy ta cần có một tổng: $C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$, do đó ta xuất phát từ nhị thức Niu-ơn: $(1+x)^n$.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ơn:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + kC_n^k x^{k-1} + \dots + nC_n^n x^{n-1} \quad (2)$$

Thay $x=1$ vào hai vế của (2) ta được: $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n.2^{n-1}$.

Vậy $S_1 = n.2^{n-1}$.

Thay $x=-1$ vào hai vế của (2) ta được:

$$S_2 = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \dots + k(-1)^{k-1} C_n^k + \dots + n(-1)^{n-1} C_n^n = 0$$

Ví dụ 2. Tính tổng sau:

$$S = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \dots + kC_n^k 3^{n-k} + \dots + nC_n^n.$$

Phân tích: Quan sát tổng trên, ta thấy mỗi số hạng trong tổng cũng xuất hiện dấu hiệu của phép toán lấy đạo hàm tương tự như ví dụ 1, mỗi số hạng đều có nhân tử: kC_n^k . Ngoài ra còn chứa nhân tử là lũy thừa của 3. Vậy ta chọn một nhị thức Niu-ơn phù hợp.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ơn:

$$(3+x)^n = C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} x + C_n^2 3^{n-2} x^2 + C_n^3 3^{n-3} x^3 + \dots + C_n^k 3^{n-k} x^k + \dots + C_n^n x^n \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$n(3+x)^{n-1} = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} x + 3C_n^3 3^{n-3} x^2 + \dots + kC_n^k 3^{n-k} x^{k-1} + \dots + nC_n^n x^{n-1} \quad (2)$$

Thay $x=1$ vào hai vế của (2) ta được:

$$S = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \dots + kC_n^k 3^{n-k} + \dots + nC_n^n = n.4^{n-1}$$

Nếu thay $x=-1$ ta có thể tính được tổng đan dấu :

$$T = C_n^1 3^{n-1} - 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} - 4C_n^4 3^{n-4} + \dots + k(-1)^{k-1} C_n^k 3^{n-k} + \dots + n(-1)^{n-1} C_n^n = n.2^{n-1}$$

Ví dụ 3. Tính tổng sau:

$$S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + \dots + (k+1)C_n^k + \dots + (n+1)C_n^n.$$

Phân tích: Trong ví dụ 1 và ví dụ 2, thì tổng S cần tính không chứa số hạng C_n^0 do khi thực hiện phép toán đạo hàm thì số hạng này đã bị triệt tiêu. Mặt khác mỗi số hạng trong tổng S có dạng: $(k+1)C_n^k$. Như vậy ta cần tăng bậc của x thêm 1 bậc trong mỗi số hạng của khai triển nhị thức Niu-tơn $(1+x)^n$.

Lời giải Khai triển nhị thức Niu-tơn:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^kx^k + \dots + C_n^nx^n \quad (1)$$

Nhân cả hai vế của (1) với x ta được:

$$x(1+x)^n = C_n^0x + C_n^1x^2 + C_n^2x^3 + C_n^3x^4 + \dots + C_n^kx^{k+1} + \dots + C_n^nx^{n+1} \quad (2)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (2) ta được:

$$(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + \dots + (k+1)C_n^kx^k + \dots + (n+1)C_n^nx^n \quad (3)$$

Thay $x=1$ vào hai vế của (3) ta được:

$$S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + \dots + (k+1)C_n^k + \dots + (n+1)C_n^n = 2^n + n2^{n-1}$$

Vậy $S = 2^{n-1}(n+2)$.

Ví dụ 4 Tính tổng sau:

$$S = C_{2n}^1 + 3C_{2n}^3 + 5C_{2n}^5 + 7C_{2n}^7 + \dots + (2n-1)C_{2n}^{2n-1}$$

Phân tích: Ta thấy trong tổng cần tính các số hạng có dạng kC_{2n}^k là dấu hiệu để có thể sử dụng phép toán đạo hàm. Mặt khác các số hạng chỉ xuất hiện các C_{2n}^k với k lẻ. Vậy ta cần triệt tiêu các số hạng chứa C_{2n}^k với k chẵn trong khai triển nhị thức Niu-tơn thích hợp.

Lời giải Khai triển các nhị thức Niu-tơn sau:

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + C_{2n}^3x^3 + \dots + C_{2n}^kx^k + \dots + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n} \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 - C_{2n}^3x^3 + \dots + (-1)^k C_{2n}^kx^k + \dots - C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n} \quad (2)$$

Trừ vế với vế (1) và (2) ta được:

$$(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2(C_{2n}^1x + C_{2n}^3x^3 + C_{2n}^5x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}) \quad (3)$$

Đạo hàm hai vế của (3) ta được:

$$2n(1+x)^{2n-1} + 2n(1-x)^{2n-1} = 2(C_{2n}^1 + 3C_{2n}^3x^2 + 5C_{2n}^5x^4 + \dots + (2n-1)C_{2n}^{2n-1}x^{2n-2}) \quad (4)$$

Thay $x=1$ vào hai vế của (4) ta được:

$$S = C_{2n}^1 + 3C_{2n}^3 + 5C_{2n}^5 + 7C_{2n}^7 + \dots + (2n-1)C_{2n}^{2n-1} = n.2^{2n-1}.$$

Tương tự nếu trong tổng chỉ gồm các số hạng C_{2n}^k với k chẵn thì ta cộng vế với vế của (1) và (2).

Nhận xét: Khi bài toán cho mà số hạng tổng quát không phải là kC_n^k mà là $(k-1)kC_n^k$ hoặc $k(k+1)C_n^k$ thì ta nghĩ tới việc lấy đạo hàm đến cấp hai của các hàm đa thức cơ bản. Thậm chí nếu số hạng tổng quát có dạng $(k-2)(k-1)kC_n^k$ hoặc $(k-1)k(k+1)C_n^k$ thì ta sẽ lấy đạo hàm đến cấp ba và tùy từng trường hợp ta có thể phải tăng bậc của x cho phù hợp.

Ví dụ 5 Tính các tổng sau:

$$a) S_1 = 1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + 3.4C_n^4 + \dots + (k-1)kC_n^k \dots + (n-1)nC_n^n$$

$$b) S_2 = 1.2C_n^1 + 2.3C_n^2 + 3.4C_n^3 + \dots + (k-1)kC_n^{k-1} \dots + n(n+1)C_n^n$$

Phân tích: Mỗi số hạng trong tổng S_1 có dạng $(k-1)kC_n^k$, đó là kết quả của phép lấy đạo hàm đến cấp hai của $C_n^k x^k$ tại $x=1$.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ton:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + kC_n^k x^{k-1} + \dots + nC_n^n x^{n-1} \quad (2)$$

Lấy tiếp đạo hàm hai vế của (2) ta được:

$$(n-1)n(1+x)^{n-2} = 1.2C_n^2 x + 2.3C_n^3 x^2 + \dots + (k-1)kC_n^k x^{k-2} + \dots + (n-1)nC_n^n x^{n-2} \quad (3)$$

Thay $x=1$ vào hai vế của (3) ta được:

$$S_1 = 1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + 3.4C_n^4 + \dots + (k-1)kC_n^k \dots + (n-1)nC_n^n = (n-1)n.2^{n-2}$$

Tương tự để tính tổng S_2 ta cũng thực hiện lấy đạo hàm đến cấp hai, nhưng trước khi thực hiện lấy đạo hàm cấp hai, ta tăng bậc của x trong mỗi số hạng lên 2 bậc.

Nhân hai vế của (2) với x^2 ta được:

$$nx^2(1+x)^{n-1} = C_n^1 x^2 + 2C_n^2 x^3 + 3C_n^3 x^4 + \dots + kC_n^k x^{k+1} + \dots + nC_n^n x^{n+1} \quad (4)$$

Đạo hàm hai vế của (4) ta được:

$$n[2x(1+x)^{n-1} + (n-1)x^2(1+x)^{n-2}] = 1.2C_n^1x + 2.3C_n^2x^2 + 3.4C_n^3x^3 + \dots + k(k+1)C_n^kx^k + \dots + n(n+1)C_n^nx^n \quad (5)$$

Thay $x=1$ vào hai vế của (5) ta được:

$$S_2 = 1.2C_n^1 + 2.3C_n^2 + 3.4C_n^3 + \dots + (k-1)kC_n^{k-1} + \dots + n(n+1)C_n^n = 2^{n-2}(n^2 + 3n)$$

Ví dụ 6 Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ta có:

$$1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \dots + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$$

Phân tích: Để tính tổng ở vế trái của đẳng thức trên, tương tự như ví dụ 5 ta cũng thực hiện lấy đạo hàm đến cấp hai và cũng đẩy bậc của x lên hợp lý để có được tổng cần tính.

Lời giải Khai triển nhị thức Niu-ơn:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^kx^k + \dots + C_n^nx^n \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + \dots + kC_n^kx^{k-1} + \dots + nC_n^nx^{n-1} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) với x ta được:

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1x + 2C_n^2x^2 + 3C_n^3x^3 + \dots + kC_n^kx^k + \dots + nC_n^nx^n \quad (3)$$

Đạo hàm hai vế của (3) ta được:

$$n(1+x)^{n-1} + (n-1)n.x(1+x)^{n-2} = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2x + 3^2C_n^3x^2 + \dots + n^2C_n^nx^{n-1} \quad (4)$$

Thay $x=1$ vào hai vế của (4) ta được:

$$1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \dots + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2} \quad (\text{Đpcm}).$$

Ví dụ 7 Tìm $n \in \mathbb{N}_+$ thỏa mãn:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + k.(-2)^{k-1}C_{2n+1}^k + \dots + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

Phân tích: Để tính tổng ở vế trái của đẳng thức trên ta thấy mỗi số hạng trong tổng cũng xuất hiện thừa số: kC_{2n+1}^k . Đây là dấu hiệu để sử dụng phép toán đạo hàm.

Lời giải Khai triển nhị thức Niu-ơn:

$$(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + \dots + C_{2n+1}^k x^k + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1} \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2 x + 3C_{2n+1}^3 x^2 + \dots + kC_{2n+1}^k x^{k-1} + \dots + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n} \quad (2)$$

Thay $x = -2$ vào hai vế của (2) ta được:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + \dots + k.(-2)^{k-1} C_{2n+1}^k + \dots + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2n+1$$

Từ giả thiết ta suy ra: $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$.

Ví dụ 8 Tìm hệ số của x^6 trong khai triển nhị thức Niu-ton: $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^n$,

biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn:

$$1.2^{n-1} C_n^1 + 2.2^{n-2} C_n^2 + 3.2^{n-3} C_n^3 + \dots + k.2^{n-k} C_n^k + \dots + nC_n^n = 12.3^{n-1}$$

Phân tích: Trước hết ta đi tìm n thỏa mãn giả thiết. Ta đi tính tổng vế trái của đẳng thức trên. Ta thấy xuất hiện các nhân tử: $1, 2, 3, \dots, k, \dots, n$ trong các số hạng của tổng, đó là dấu hiệu sử dụng phép toán đạo hàm để tính tổng.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niu-ton:

$$(2+x)^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} x + C_n^2 2^{n-2} x^2 + C_n^3 2^{n-3} x^3 + \dots + C_n^k 2^{n-k} x^k + \dots + C_n^n x^n \quad (1)$$

Đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$n(2+x)^{n-1} = C_n^1 2^{n-1} + 2C_n^2 2^{n-2} x + 3C_n^3 2^{n-3} x^2 + \dots + kC_n^k 2^{n-k} x^{k-1} + \dots + nC_n^n x^{n-1} \quad (2)$$

Thay $x = 1$ ta được:

$$1.2^{n-1} C_n^1 + 2.2^{n-2} C_n^2 + 3.2^{n-3} C_n^3 + \dots + k.2^{n-k} C_n^k + \dots + nC_n^n = n.3^{n-1}$$

Từ giả thiết ta có: $n.3^{n-1} = 12.3^{n-1} \Leftrightarrow n = 12$.

$$\text{Xét khai triển nhị thức: } \left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^3)^{12-k} \left(\frac{-2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (-2)^k x^{36-5k}$$

Số hạng chứa x^6 tương ứng với k thỏa mãn: $36 - 5k = 6 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy hệ số của x^6 trong khai triển trên là: $2^6 C_{12}^6$.

2. Sử dụng tích phân để giải các bài toán tổ hợp:

Các dấu hiệu nhận biết sử dụng phương pháp tích phân để tính tổng:

Nếu trong tổng dãy tổ hợp, các số hạng chứa các phân số:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ và mẫu số được xếp theo thứ tự tăng hoặc giảm đều theo một

quy luật nào đó, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Khi đó ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm hàm để tính tích phân với các cận thích hợp.

Bước 2: Tính tích phân trong cả hai vế: vế chưa khai triển nhị thức Newton và vế đã khai triển.

Bước 3: Cho hai kết quả bằng nhau và kết luận.

Chú ý: Khi mỗi hệ số trong tổng có dạng $b^k - a^k$, ta chọn cận từ a đến b, tức là

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ví dụ 1 Tính tổng sau: $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{1}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$

Phân tích: Mỗi số hạng trong tổng trên có dạng: $\frac{1}{k+1}C_n^k$, đó là kết quả của

phép toán tích phân: $\int_0^1 C_n^k x^k dx = \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{k+1} C_n^k$. Vậy để tính tổng S ta

chọn nhị thức: $(1+x)^n$ và lấy tích phân từ 0 đến 1.

Lời giải: Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n$ (1)

Suy ra $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n) dx$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \left(C_n^0 x + \frac{1}{2} C_n^1 x^2 + \frac{1}{3} C_n^2 x^3 + \frac{1}{4} C_n^3 x^4 + \dots + \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1} + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n x^{n+1} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \left(C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \frac{1}{4} C_n^3 + \dots + \frac{1}{k+1} C_n^k + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n \right)$$

$$\text{Vậy } S = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Tương tự nếu tính tổng đan dấu

$S_1 = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n$ ta cần tính tích phân

$$\int_0^1 (1-x)^n dx = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Suy ra $S_1 = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$

Ví dụ 2 Tính tổng $S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{k+1}-1}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

Phân tích: Các số hạng trong tổng có chứa các phân số, mẫu số được xếp theo thứ tự tăng đều một đơn vị, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân. Bây giờ ta suy nghĩ hàm lấy tích phân và các cận tích phân. Vì số hạng cuối cùng có hệ số

$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ nên ta biết cận từ 1 đến 2 và tổng không đan dấu nên ta sử dụng:

$$\int_1^2 (1+x)^n dx.$$

Lời giải. Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^kx^k + \dots + C_n^nx^n$

Suy ra $\int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 (C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^kx^k + \dots + C_n^nx^n) dx$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_1^2 = \left(C_n^0x + \frac{1}{2}C_n^1x^2 + \frac{1}{3}C_n^2x^3 + \dots + \frac{1}{k+1}C_n^kx^{k+1} + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1} \right) \Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} = \left(C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{k+1}-1}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n \right)$$

Vậy $S = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.$

Ví dụ 3 Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$2C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^12^2 + \frac{1}{3}C_n^22^3 - \frac{1}{4}C_n^32^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n2^{n+1} = \frac{1}{n+1}[1+(-1)^n]$$

Phân tích: Về trái có chứa các phân số, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân.

Vì số hạng cuối cùng có hệ số $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ nên ta biết cận tích phân từ 0 đến 2 và tổng

đan dấu nên ta sử dụng $\int_0^2 (1-x)^n dx.$

Lời giải. Khai triển

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - C_n^3x^3 + \dots + (-1)^k C_n^kx^k + \dots + (-1)^n C_n^nx^n$$

Suy ra

$$\int_0^2 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^2 = \frac{1}{n+1} [1 + (-1)^n] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 (C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \dots + (-1)^k C_n^k x^k + \dots + (-1)^n C_n^n x^n) dx \\ &= \left[C_n^0 x - \frac{1}{2} C_n^1 x^2 + \frac{1}{3} C_n^2 x^3 - \dots + (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} C_n^n x^{n+1} \right]_0^2 \\ &= C_n^0 2 - \frac{1}{2} C_n^1 2^2 + \frac{1}{3} C_n^2 2^3 - \dots + (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k 2^{k+1} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} C_n^n 2^{n+1} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 2^2 + \frac{1}{3} C_n^2 2^3 - \frac{1}{4} C_n^3 2^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} C_n^n 2^{n+1} = \frac{1}{n+1} [1 + (-1)^n]$$

Ví dụ 4 Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} C_{2n}^1 + \frac{1}{4} C_{2n}^3 + \frac{1}{6} C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n} C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n+1}$$

Phân tích: Các số hạng trong tổng về trái xuất hiện dấu hiệu của phép tính tích phân, nhưng chỉ chứa các C_{2n}^k với k lẻ. Vậy ta xét các khai triển để triệt tiêu các C_{2n}^k với k chẵn.

Lời giải Xét các khai triển

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + \dots + C_{2n}^k x^k + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - C_{2n}^3 x^3 + \dots + (-1)^k C_{2n}^k x^k + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (2)$$

Trừ vế với vế (1) và (2) ta được:

$$(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} = C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} \quad . \text{ Suy ra:}$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \int_0^1 (C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}) dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(1+x)^{2n+1} - (1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} C_{2n}^1 x^2 + \frac{1}{4} C_{2n}^3 x^4 + \dots + \frac{1}{2n} C_{2n}^{2n-1} x^{2n} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} C_{2n}^1 + \frac{1}{4} C_{2n}^3 + \dots + \frac{1}{2n} C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n+1}$$

Nhận xét: Nếu phải tính tổng $C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$ thì ta xét

$$P(x) = \frac{(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^4 x^4 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

Sau đó tính tích phân $\int_0^1 P(x)dx = \frac{2^{2n}}{2n+1}$.

$$\text{Ta được } C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

Bài tập tương tự:

1. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{2}{5}C_{2n}^4 \dots + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$

$$\text{Ta có: } 2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{2}{5}C_{2n}^4 \dots + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} = 2 \left(C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 \dots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} \right)$$

Từ kết quả ví dụ 4 ta có điều phải chứng minh.

2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3(k+1)}C_n^k + \dots + \frac{1}{3(n+1)}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3(k+1)}C_n^k + \dots + \frac{1}{3(n+1)}C_n^n \\ &= \frac{1}{3} \left(C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n \right) \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả ví dụ 1 ta có điều phải chứng minh.

3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^k}{2(k+1)}C_n^k + \dots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Nhận xét: Khi bài toán cho mà số hạng tổng quát không phải là $\frac{1}{k+1}C_n^k$ mà là

$\frac{1}{k+2}C_n^k$ thì ta phải nhân thêm x vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích

phân, còn nếu là $\frac{1}{k+3}C_n^k$ thì ta phải nhân thêm x^2 vào hàm đa thức cơ bản trước khi tính tích phân,...

Ví dụ 5 Tính tổng: $S = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \dots + \frac{1}{k+2}C_n^k + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^n$

Phân tích: Các số hạng trong tổng có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân. Vì mỗi số hạng có dạng $\frac{1}{k+2}C_n^k$, nên ta phải nhân thêm x vào

hàm số cơ bản trước khi tính tích phân. Khi đó ta sử dụng $\int_0^1 x(1+x)^n dx$.

Lời giải Xét $x(1+x)^n = x(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^nx^n)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(1+x)^n dx &= \int_0^1 (1+x)^{n+1} dx - \int_0^1 (1+x)^n dx = \left(\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2} - \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+2} - \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \\ &= \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)} \\ \int_0^1 x(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^nx^n) dx &= \int_0^1 (C_n^0x + C_n^1x^2 + C_n^2x^3 + C_n^3x^4 + \dots + C_n^nx^{n+1}) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}C_n^0x^2 + \frac{1}{3}C_n^1x^3 + \frac{1}{4}C_n^2x^4 + \frac{1}{5}C_n^3x^5 + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^nx^{n+2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \frac{1}{5}C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^n \\ \text{Suy ra } S &= \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \dots + \frac{1}{k+2}C_n^k + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^n = \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Tương tự ta tính được tổng đan dấu:

$$S_1 = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^k}{k+2}C_n^k + \dots + \frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n$$

Bằng cách sử dụng tích phân $\int_0^1 x(1-x)^n dx$.

Đặt $u = 1-x \Rightarrow du = -dx$

Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1; x=1 \Rightarrow u=0$

Khi đó

$$\int_0^1 x(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-u)u^n du = \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{Suy ra } S_1 = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 - \dots + \frac{(-1)^k}{k+2}C_n^k + \dots + \frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Ví dụ 6 Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 + \dots + \frac{k}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{n}{n+1}C_n^n = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1}$$

Phân tích: Vế trái có chứa các phân số, ta nghĩ đến việc sử dụng tích phân.

Bằng cách phân tích số hạng tổng quát $\frac{k}{k+1}C_n^k = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)C_n^k$, cho ta tổng:

$$(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) - \left(\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n \right). \text{ Từ đó ta sử dụng}$$

$$2^n - \int_0^1 (1+x)^n dx.$$

Lời giải Cách 1: Xét số hạng tổng quát ở vế trái $\frac{k}{k+1}C_n^k = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)C_n^k$ với

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } & \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 + \dots + \frac{k}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{n}{n+1}C_n^n = \\ &= (C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) - \left(\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n \right) \\ &= 2^n - \int_0^1 (1+x)^n dx = 2^n - \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\textbf{Cách 2:} \text{ Xét } (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^nx^n \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + \dots + nC_n^nx^{n-1} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) với x ta được:

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1x + 2C_n^2x^2 + 3C_n^3x^3 + \dots + nC_n^nx^n \quad (3)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 nx(1+x)^{n-1}dx &= n \int_0^1 \left[(1+x)^n - (1+x)^{n-1} \right] dx \\ &= n \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1+x)^n}{n} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1) = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + \dots + nC_n^n x^n) dx = \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 + \dots + \frac{n}{n+1}C_n^n$$

$$\text{Từ (3) suy ra } \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{4}C_n^3 + \dots + \frac{k}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{n}{n+1}C_n^n = \frac{(n-1)2^n + 1}{n+1}$$

Ví dụ 7 Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{n+1}C_n^0 - \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n-1}C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Phân tích: Các số hạng ở vế trái chứa các phân số với mẫu giảm dần và tổng đan dấu, nên ta sử dụng $\int_0^1 (x-1)^n dx$.

Lời giải Ta có

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} + \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} \dots + C_n^n (-1)^n \quad (1)$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 (x-1)^n dx = \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} + \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} \dots + C_n^n (-1)^n) dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1} C_n^0 x^{n+1} - \frac{1}{n} C_n^1 x^n + \frac{1}{n-1} C_n^2 x^{n-1} - \frac{1}{n-2} C_n^3 x^{n-2} + \dots + C_n^n (-1)^n x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} C_n^0 - \frac{1}{n} C_n^1 + \frac{1}{n-1} C_n^2 - \frac{1}{n-2} C_n^3 + \dots + C_n^n (-1)^n \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có } \frac{1}{n+1} C_n^0 - \frac{1}{n} C_n^1 + \frac{1}{n-1} C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Bài tập tương tự :

$$1. \text{ Tính tổng: } S = C_{2015}^0 + \frac{1}{3} C_{2015}^2 + \frac{1}{5} C_{2015}^4 + \dots + \frac{1}{2015} C_{2015}^{2014}$$

2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$2C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 2^2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n 2^{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$$

3. Tính tổng: $S = \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+3}C_n^n$

4. Tính tổng: $\frac{1}{n+1}C_n^0 + \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n-1}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n-k+1}C_n^k + \dots + C_n^n$

5. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$C_{2n+1}^1 2^{2n} - 2C_{2n+1}^2 3 \cdot 2^{2n-1} + 3C_{2n+1}^3 3^2 2^{2n-2} - 4C_{2n+1}^4 3^3 2^{2n-3} + \dots + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} 3^{2n} = 2009$$

6. Tính tổng: $S = C_n^0 + \frac{3^2-1}{2}C_n^1 + \frac{3^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{3^{k+1}-1}{k+1}C_n^k + \dots + \frac{3^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

7. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

a) $1.C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n = (n+2).2^{n-1}$

b) $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \dots + n(n-1)C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$

c) $C_{10}^1 + 2.9.C_{10}^2 + 3.9^2.C_{10}^3 + \dots + 9.9^8.C_{10}^9 + 10.9^9.C_{10}^{10} = 10^{10}$

8. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$\frac{1}{1}C_n^0 2^0 + \frac{1}{2}C_n^1 2^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n 2^n = \frac{3^{2012} - 1}{4024}$$

9. Tính tổng: $T = \frac{2^6}{1}C_6^0 + \frac{2^5}{2}C_6^1 + \frac{2^4}{3}C_6^2 + \frac{2^3}{4}C_6^3 + \frac{2^2}{5}C_6^4 + \frac{2^1}{6}C_6^5 + \frac{2^0}{7}C_6^6$

10. Tính tổng: $S = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^0.C_n^1 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^1.C_n^2 + \dots + n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.C_n^n$

11. Tính tổng: $S = C_n^1 \cdot \frac{1}{1} - C_n^2 \cdot \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^n \cdot \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

12. Tính tổng: $S = \frac{1.C_n^0}{A_1^1} + \frac{2.C_n^1}{A_2^1} + \frac{3.C_n^2}{A_3^1} + \dots + \frac{(n+1).C_n^n}{A_{n+1}^1}$, biết $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211$

HD : Phân tích $S = (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n) - \left(\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n\right)$.

4. Kết quả, hiệu quả mang lại.

Qua thực tế áp dụng tôi nhận thấy các em học sinh đã biết vận dụng một cách linh hoạt phương pháp đạo hàm và tích phân vào từng bài toán cụ thể và tỏ

ra hứng thú với phương pháp này. Không những thế các em còn biết áp dụng với nhiều kiểu bài khác nhau khi cho làm kết hợp với các dạng bài tập khác.

+) Bảng tổng hợp điểm các bài kiểm tra đối chứng (ĐC) và trong quá trình thực nghiệm (TN).

Loại bài kiểm tra	Phương án	Tổng bài	Số bài đạt điểm trung bình (0 → 10)					
			0 → 2	> 2 < 3,5	3,5 < 5	5 → < 6,5	6,5 < 8	8 → 10
15 phút	ĐC	70	0	0	6	35	21	8
Định kì 45 phút	ĐC	70	0	3	5	31	22	9
15 phút	TN	70	0	0	2	25	25	18
Định kì 45 phút	TN	70	0	0	1	24	29	16
Tổng hợp	ĐC	140	3		77		60	
	Tỉ lệ %		2%		55%		43%	
	TN	140	0		52		88	
	Tỉ lệ %		0%		37%		63%	

+ Điểm trung bình của các lớp trong TN cao hơn điểm ĐC.

+ Điểm khá, giỏi trong TN tăng dần qua các bài kiểm tra. Chứng tỏ khả năng tư duy của các em được nâng dần qua việc rèn luyện và hệ thống các phương pháp giải quyết vấn đề cho các em học sinh.

5. Đánh giá về phạm vi ảnh hưởng của sáng kiến.

Đề tài được triển khai nâng cao chất lượng học tập của học sinh lớp 11 và lớp 12.

6. Kiến nghị, đề xuất:

Đề tài nên được nhân rộng trong các trường THPT trong tỉnh để góp phần nâng cao chất lượng dạy và học bộ môn Toán. /.

Tài liệu tham khảo

1. Tài liệu giáo khoa theo chương trình nâng cao và sách giáo khoa chuyên toán.
2. Tạp chí toán học và tuổi trẻ
3. Các bài thi Olympic toán THPT Việt Nam và các đề thi đại học.
4. Mạng Internet.

**ĐÁNH GIÁ, NHẬN XÉT CỦA HỘI ĐỒNG THẨM ĐỊNH SÁNG KIẾN
KINH NGHIỆM TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**ĐÁNH GIÁ, NHẬN XÉT CỦA HỘI ĐỒNG THẨM ĐỊNH SÁNG KIẾN
KINH NGHIỆM SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH ĐIỆN BIÊN**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐIỆN BIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN**

**SỬ DỤNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN
ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP**

**Tác giả: Phạm Thị Hà Định
Đơn vị công tác: Tổ Toán –Tin**

Điện Biên, tháng 4 năm 2015