PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN SỬ DỤNG CÔNG THỨC KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON TRONG CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC

Tác giả: Hà Biên Thùy
Giáo viên THPT chuyên Lê Quý Đôn

A. Sự cần thiết, mục đích của việc thực hiện sáng kiến:

- Môn toán có vị trí quan trọng đặc biệt trong các môn học ở nhà trường phổ thông, nó là cơ sở của nhiều môn học khác. Là môn học được nhiều học sinh yêu thích vì tính tư duy trừu tượng để cho các em tha hồ khám phá những điều mới lạ khi đi tìm hiểu nó.

- Kiến thức về nhị thức Newton là một trong những kiến thức cơ bản nhất được trình bày trong chương trình toán THPT. Những vấn đề về nhị thức Newton không những phong phú và đa dạng mà còn rất quan trọng đối với học sinh, điều đó được thể hiện rõ qua các kỳ thi tuyển sinh và đại học - cao đẳng hàng năm.

- Ngoài nội dung được trình bày trong SGK Đại số và Giải tích 11 - Nâng cao và một số dạng toán cơ bản về nhị thức Newton, còn cung cấp thêm một số dạng toán và phương giải của một số dạng dạng toán khác sử dụng nhị thức Newton nhằm phục vụ tốt cho các kỳ thi đặc biệt là kỳ thi vào đại học và cao đẳng.

- Để đáp ứng nhu cầu học tập của học sinh và mục đích của việc đổi mới phương pháp dạy học môn toán trong trường THPT để phát huy tính tích cực, chủ động sáng tạo nhằm nâng cao tư duy và trí tuệ cho các em . Tôi chọn đề tài : ***"Phương pháp giải các dạng toán sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton trong các đề thi đại học"***.

B. Phạm vi triển khai thực hiện:

- Đối tượng nghiên cứu: hệ thống các kiến thức, các dạng toán cơ bản, nâng cao và kỹ năng làm toán có sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton.

- Sử dụng cho học sinh học lớp 11, ôn thi học sinh giỏi vòng tỉnh lớp 11 và học sinh ôn thi đại học, cao đẳng.

- Khách thể là học sinh lớp 12C7 năm học 2014 - 2015 Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn.

C. Nội dung

1. Tình trạng giải pháp đã biết:

- Nội dung bài học Nhị thức Newton trong chương trình sách giáo khoa lớp 11 nâng cao với số tiết khá khiêm tốn theo phân phối chương trình của Bộ giáo dục và đào tạo là 3 tiết cả lý thuyết và bài tập, như vậy học sinh chỉ có thể giải quyết các dạng toán hết sức cơ bản về nhị thức Newton trong sách giáo khoa và sách bài tập.

- Trong thực tế với các đề thi đại học trong những năm từ 2002 đến nay thì các câu trong đề thi có sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton đều vận dụng và kết hợp rất nhiều kiến thức mà học sinh được học sau khi học Nhị thức Newton trong chương trình lớp 11. Chính vì vậy để kết nối các kiến thức trong toàn bộ chương trình toán THPT có sử dụng công thức khai triển Nhị thức Newton để giải là một vấn đề được đặt ra với các học sinh thi đại học cao đẳng. Nội dung chuyên đề này có thể giúp giải quyết cơ bản các vấn đề còn tồn tại trên.

2. Nội dung giải pháp.

a) Mục đích của giải pháp:

- Rèn luyện kỹ năng thành thạo cho học sinh với các dạng toán cơ bản trong chương trình toán 11.

- Cung cấp thêm các kiến thức và các dạng toán có sử dụng các kiến thức trong chương trình lớp 12.

- Phối kết hợp một cách linh hoạt các kiến thức trong hai chương trình để giải quyết các bài toán phức tạp.

- Giải quyết tốt các bài trong các đề thi đại học của bộ giáo dục từ năm 2002 đến nay và các đề thi thử của các trường THPT.

b) Nội dung giải pháp

PHẦN 1: Cơ sở lí luận.

Các kiến thức cơ bản và cần thiết trong chương trình sách giáo khoa lớp 11 nâng cao để giải quyết các bài toán sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton.

1. Hoán vị: (Công thức tính số hoán vị)

- Số hoán vị của tập gồm *n* phần $\boxed{P_n = n!}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

- Quy ước: $0! = 1! = 1$

2. Chỉnh hợp: Cho tập A gồm *n* phần tử, số chỉnh hợp chập *k* của *n* phần được tính theo công thức: với $\forall k \le n, n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)}$$

3. Tổ hợp: Cho tập A gồm *n* phần tử, số tổ hợp chập *k* của *n* phần tử được tính theo công thức: $\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ với $k \le n, n \in \mathbb{N}^*$.

4. Một số đẳng thức tổ hợp:

Với mọi $k \le n, n \in \mathbb{N}^*$ ta có các đẳng thức sau thường dùng:

+ $A_n^k = k!C_n^k$

+ $C_n^k = C_n^{n-k}$

+ $C_n^k + C_n^{k-1} = C_n^{k+1}$

5. Nhị thức Newton

- Công thức khai triển nhị thức Newton: với $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n}$$

- Các đẳng thức thường dùng được suy ra từ nhị thức Newton:

+, $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + ... + (-1)^n C_n^n b^n$.

+, $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$.

+, $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ...... + (-1)^n C_n^n = 0$.

+, $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$.

+, $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - .... + (-1)^n C_n^n x^n$.

PHẦN 2: Các dạng toán - Phương pháp giải - Các ví dụ minh họa và bài tập tự luyện.

Dạng 1: Các bài toán về hệ số trong khai triển nhị thức Newton.

1. Phân tích và đưa ra phương pháp chung cho dạng.

- Phân tích: bài toán thường gặp với các dạng câu hỏi: tìm hệ số của x^k trong khai triển, hoặc tìm số hạng không chứa biến trong khai triển, hoặc số hạng thứ *k* trong khai triển hoặc các câu hỏi khác liên quan đến hệ số trong một khai triển nhị thức Newton đã cho khi đó ta sẽ thực hiện theo các bước sau.

- Phương pháp:

Bước 1: Khai triển nhị thức Newton ở dạng tổng quát hoặc ở dạng khai triển.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Bước 2: Tìm dạng số hạng tổng quát của khai triển kí hiệu: $T_{k+1} = C_n^k . a^{n-k} . b^k$

Rút gọn số hạng tổng quát với số mũ thu gọn của các biến có trong khai triển.

Bước 3: Căn cứ và yêu cầu của bài toán để đưa ra phương trình tương ứng với giái trị của k. Giải phương trình tìm k thỏa mãn $0 \le k \le n$.

Bước 4: Thay giá trị *k* vừa tìm được và số hạng tổng quát và trả lời đúng yêu cầu của bài toán.

* Một số lưu ý khi thực hiện dạng toán.

- Vận dụng công thức phù hợp $(a+b)^n$ hoặc $(a-b)^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$, khai triển công thức đó ở dạng khai triển theo số mũ tăng dần hoặc giảm dần của *a* hoặc dùng công thức thu gọn.

- Viết được công thức của số hạng tổng quát và thu gọn số mũ của các biến có trong khai triển. Có thể sử dụng các công thức sau để thu gọn số mũ của biến:

+ Các phép toán với lũy thừa số mũ nguyên và số mũ hữu tỉ:

$\left(a^m\right)^n = a^{m.n},\ \forall m,n \in Z, a > 0$

$a^m.a^n = a^{m+n};\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$

+ Căn bậc n của một số

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};\ a > 0; m,n \in Z$

- Trong khai triển $\left(a+b\right)^n$ luôn có (n +1) số hạng.

- Số hạng thứ k +1 tương ứng n = k và gọi là số hạng tổng quát của khai triển.

- Tổng số mũ của a và b trong khai triển luôn bằng n.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1:

[1]. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $\left(2x-3y\right)^{200}$.

[2]. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3-2x\right)^{15}$.

[3]. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7;\quad \left(x > 0\right)$.

Đề tuyển sinh khối D năm 2004

Phân tích: Ta thấy đây là các ví dụ rất cơ bản của khai triển nhị thức ta thực hiện đúng các bước đã nêu ở trên.

<u>Lời giải.</u>

[1]. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $\left(2x-3y\right)^{200}$.

- Khai triển nhị thức ta có:

$$\left(2x-3y\right)^{200} = \sum_{k=0}^{200} C_{200}^k \left(2x\right)^{200-k}\left(-3y\right)^k = \sum_{k=0}^{200}\left(-3\right)^k C_{200}^k 2^{200-k}\left(x\right)^{200-k} y^k \quad .$$

- Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1} = \left(-3\right)^k C_{200}^k.x^{200-k}.y^k$

- Theo yêu cầu của bài tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ thì ta phải có:

$$\begin{cases} 200-k=101 \\ k=99 \end{cases} \Leftrightarrow k=99.$$

- Với $k=99$ thì hệ số cần tìm là: $(-3)^{99}C_{200}^{99}2^{101}$.

[2]. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(3-2x)^{15}$.

- Khai triển nhị thức ta có: $(3-2x)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}3^{15-k}(-2)^k x^k$.

- Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1}=3^{15-k}.(-2)^k C_{15}^k.x^k$

- Theo yêu cầu của bài tìm hệ số của x^7 thì ta phải có: $k=7$.

- Với $k=7$ thì hệ số cần tìm là: $C_{15}^{7}3^8(-2)^7$.

[3]. Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$; $(x>0)$.

- Khai triển nhị thức ta có:

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{7-k}\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^k=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}$$

- Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1}=C_7^k.x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}$

- Để có số hạng không chứa *x* trong khai triển ta phải có số mũ của *x* bằng 0. Tức là ta có phương trình:

$$\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k=0\Leftrightarrow k=4.$$

- Vậy số hạng không chứa *x* là số hạng thứ 5 và bằng: $T_5=C_7^4=35$.

Ví dụ 2: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $P(x)=\left(1+x^2(1-x)\right)^8$.

Đề tuyển sinh khối A năm 2004.

<u>Lời giải</u>

- Theo công thức khai triển ta có:

$$P(x)=\left(1+x^2(1-x)\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(x^2(1-x)\right)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^k x^{2k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j(-1)^j x^j$$

$$= \sum_{k=0}^{8}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_8^k C_k^j x^{2k+j}; \quad (0 \le j \le k \le 8,\ j,k \in \mathrm{N})$$

- Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1} = (-1)^j .C_8^k.C_k^j x^{2k+j}$

- Để có hệ số x^8 trong khai triển ta cần có: $2k + j = 8 \Leftrightarrow j = 8 - 2k$.

Mà $0 \le j \le k \le 8$ nên $0 \le 8 - 2k \le 8 \Leftrightarrow 0 \le k \le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathrm{N} \\ k = 0,1,2,3,4 \end{cases}$

- Với $k = 0 \Rightarrow j = 8$ (loại); $k = 1 \Rightarrow j = 6$ (loại); $k = 2 \Rightarrow j = 4$ (loại);

$k = 3 \Rightarrow j = 2$ (thỏa mãn); $k = 4 \Rightarrow j = 0$ (thỏa mãn).

- Vậy với cặp số *k, j* thỏa mãn thì hệ số của x^8 trong khai triển là:

$$(-1)^2 C_8^3.C_3^2 + (-1)^4 C_8^4.C_4^0 = 238.$$

Nhận xét:

- Với bài toán này khi ta áp dụng khai triển của nhị thức với hai số *a* và *b* trong công thức thì ta lại thấy xuất hiện một nhị thức nữa trong nhị thức vừa khai triển. Vì vậy ta cần chú ý trong việc khai triển nhị thức lần nữa và tránh không được dùng chỉ số đã có ở khai triển trước đó và mối quan hệ của chỉ số sau với chỉ số trước.

- Phương trình với chỉ số mũ là phương trình hai ẩn, muốn giải phương trình đó ta sử dụng mối quan hệ của hai chỉ số đã nêu và chọn các cặp giá trị thỏa mãn.

Ví dụ 3: Cho khai triển $P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + ... + (1+x)^{14}$. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển của $P(x)$.

Phân tích: $P(x)$ là tổng của các khai triển với số mũ khác nhau khi đó số mũ của x^9 trong $P(x)$ cần chú ý với số mũ của x^9 trong từng khai triển.

<u>**Lời giải**</u>

Xét khai triển $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$; với $9 \le n \le 14,\ k \le n$.

Để có hệ số của x^9 trong khai triển thì *k* = 9 trong mỗi khai triển trên. Như vậy hệ số của x^9 bằng: $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9 = 3003$.

Ví dụ 4: Tìm số hạng nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5$.

Phân tích:

- Ta phải hiểu thế nào là số hạng nguyên?

- Chú ý rằng $C_n^k \in \mathbb{Z}$, $\forall 0 \le k \le n$. Như vậy muốn có số hạng nguyên của khai triển thì ta cần những điều kiện gì của số mũ khai triển?

__**Lời giải**__

Khai triển nhị thức ta có: $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{5-k} \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^k = \sum_{k=0}^{5} C_5^k 2^{\frac{5-k}{2}} 3^{\frac{k}{3}}$.

Vì C_5^k luôn nguyên với $\forall 0 \le k \le 5$ nên để có số nguyên trong khai triển thì ta phải có: $\begin{cases} 5-k \,\vdots\, 2 \\ k \,\vdots\, 3 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad 0 \le k \le 5 \quad (*)$.

Với *điều kiện* (*) thì chỉ có giá trị $k = 3$ thỏa mãn.

Vậy $k = 3$ ta có số nguyên trong khai triển là: $C_5^3 2^1 3^1 = 60$.

3. Bài tập tự luyện.

[1]. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $\left(3x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^5$; $(x \ne 0)$.

[2]. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}\right)^{12}$; $(x \ne 0)$.

[3]. Tìm số hạng tự do trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$; $(x \ne 0)$.

[4]. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$; $(x > 0)$

[5]. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $\left(1 + \dfrac{1}{x} + x^3\right)^{10}$ với $x \ne 0$.

[6]. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $\left(1 + 2x + 3x^2\right)^{10}$.

[7]. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển:

$$P(x)=(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7.$$

[8]. Đa thức $P(x)=(1+x+x^2)^{10}$ được viết lại dưới dạng:

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{20}x^{20}$. Hãy tìm hệ số a_4 của x^4 trong $P(x)$.

Đề thi đại học Bộ quốc phòng khối D năm 2002.

[9]. Tìm số hạng nguyên trong các khai triển sau:

a) $\left(\sqrt{7}+\sqrt[3]{5}\right)^{14}$ b) $\left(\sqrt{5}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^7$

[10]. Trong khai triển $\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}\right)^{124}$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

[11]. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển biểu thức:

$$P(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$$

Đề tuyển sinh khối D năm 2007.

Dạng 2: Xác định số mũ trong khai triển và tìm hệ số có điều kiện.

1. Phân tích và đưa ra phương pháp chung cho dạng.

- Dựa vào điều kiện cho của bài để tìm số mũ của khai triển thông thường là giải phương trình chứa tổ hợp, hoán vị và chỉnh hợp hoặc sử dụng một trong các đẳng thức tổ hợp đặc biệt (đã nêu trong phần cơ sở lí luận).
- Chú ý số mũ của khai triển luôn là số nguyên dương.
- Sử dụng các bước của dạng 1 để tìm hệ số của x^k trong khai triển với số mũ của khai triển đã tìm được.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $(x^2+1)^n$, biết tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024 với $n\in\mathbb{N}^*$.

Phân tích: Ta phải biết hệ số của khai triển trên có dạng nào từ đó lập phương trình với ẩn *n* và đẳng thức tổ hợp về tổng các hệ số thì ta đã có đẳng thức nào liên quan, sử dụng đẳng thức đó để tìm được số mũ *n*. Sau đó quay lại dạng 1 để tìm hệ số của x^k trong khai triển với số mũ đã tìm được.

<u>Lời giải</u>

Ta có: $\left(x^2+1\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{2n-2k}$.

Tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024 khi đó ta có phương trình:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+....+C_n^n=1024 \Leftrightarrow (1+1)^n=1024$$

$$\Leftrightarrow 2^n=1024 \Leftrightarrow n=10$$

Với n = 10 thì $\left(x^2+1\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(x^2\right)^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^{20-2k}$.

Để có hệ số của x^{12} ta phải có: $20-2k=12 \Leftrightarrow k=4$.

Vậy hệ số của x^{12} trong khai triển bằng: $C_{10}^4=210$.

Ví dụ 2: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$ với $x>0$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$.

Đề tuyển sinh khối A năm 2003.

Phân tích: Việc tìm n trong bài toán này là việc giải phương trình tổ hợp, cần chú ý trong việc giản ước giai thừa dạng tổng quát và sự chuyển đổi số mũ của x về số hữu tỉ.

Lời giải: Giải phương trình:

$$C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{3!}-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}=7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow (n+3)\left(n^2+6n+8-n^2-3n-2-42\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3n=36 \Leftrightarrow n=12$$

Ta có: $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^{-3}\right)^{12-k}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{-36+\frac{11}{2}k}$

Để có x^8 trong khai triển ta phải giải phương trình $-36+\frac{11}{2}k=8 \Leftrightarrow k=8$.

Vậy hệ số của x^8 bằng $C_{12}^8=495$.

Ví dụ 3: Cho khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$. Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển, biết *n* là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$.

Nhận xét: Tương tự như ví dụ 2.

<u>**Lời giải**</u>: Giải phương trình:

$$C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79 \Leftrightarrow 1+n+\frac{n(n-1)}{2}=79 \Leftrightarrow n^2+n-156=0 \Leftrightarrow n=12.$$

Với n = 12 ta có: $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-k}\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{16-\frac{16}{5}k}$

Để có số hạng không chứa *x* trong khai triển thì $16-\frac{16}{5}k=0 \Leftrightarrow k=5$.

Với *k* = 5 số hạng không chứa *x* là số hạng thứ 6 và bằng: $C_{12}^5=792$.

Ví dụ 4: Tìm hệ số của x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết:

$$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+....+C_{2n+1}^n=2^{20}-1.$$

Đề tuyển sinh khối A năm 2006.

Phân tích: Ta phải chú ý đẳng thức tổ hợp tìm *n* xuất phát từ đẳng thức tổ hợp nào ta đã biết, ta phải tìm được mối quan hệ của đẳng thức tổ hợp đã có với đẳng thức cho trong bài toán đưa phương trình đã cho về phương trình đơn giản hơn để tìm *n*.

<u>**Lời giải**</u>

Tìm *n* từ phương trình: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+....+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$

Ta có: $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+....+C_{2n+1}^n+C_{2n+1}^{n+1}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}$

Mà $C_{2n+1}^k=C_{2n+1}^{2n+1-k}$ tức là $C_{2n+1}^1=C_{2n+1}^{2n}$

$$C_{2n+1}^2=C_{2n+1}^{2n-1}$$

$$C_{2n+1}^3=C_{2n+1}^{2n-2}$$

....

$$C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}$$

$$\Rightarrow C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+....+C_{2n+1}^{n}=C_{2n+1}^{n}+C_{2n+1}^{n+1}+...+C_{2n+1}^{2n}$$

$$\Rightarrow C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+C_{2n+1}^{3}+....+C_{2n+1}^{n}+C_{2n+1}^{n+1}+...+C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$=C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{2n+1}+2\left(C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+C_{2n+1}^{3}+....+C_{2n+1}^{n}\right)$$

$$=2+2\left(C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+C_{2n+1}^{3}+....+C_{2n+1}^{n}\right)=2^{2n+1}$$

Ta có phương trình: $2+2\left(2^{20}-1\right)=2^{2n+1}\Leftrightarrow 2^{21}=2^{2n+1}\Leftrightarrow n=10$.

Với n = 10 ta có: $\left(\dfrac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(x^{-4}\right)^{10-k}\left(x^7\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{-40+11k}$.

Để có x^{26} trong khai triển ta phải giải phương trình: $-40+11k=26\Leftrightarrow k=6$.

Hệ số của x^{26} trong khai triển bằng: $C_{10}^{6}=210$.

Nhận xét: Bài toán này khá khó trong việc tìm số mũ *n* học sinh phải nhớ được các đẳng thức tổ hợp đã biết và vận dụng thật linh hoạt với số mũ của nhị thức trong đẳng thức tổ hợp. Còn việc tìm hệ số của x^{26} trong khai triển là bài toán cơ bản khi đã có số mũ *n*.

Ví dụ 5: Cho $f\left(x\right)=\left(1-x\right)^n+x\left(1+x\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{n+1}x^{n+1}$. Tìm a_4 biết: $a_0+a_1+a_2+....+a_{n+1}=4096$.

Phân tích: Đây là dạng toán sử dụng khai triển nhị thức dưới dạng đa thức một biến theo số mũ tăng dần hoặc giảm dần của biến. Linh hoạt trong việc chọn giá trị cụ thể của *x* để thỏa mãn giả thiết của bài toán rồi tính giá trị của đa thức ở cả hai vế và giả thiết của bài cho để tìm *n*.

<u>Lời giải</u>:

Từ khai triển $f\left(x\right)=\left(1-x\right)^n+x\left(1+x\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{n+1}x^{n+1}$ và giả thiết $a_0+a_1+a_2+....+a_{n+1}=4096$. Chọn *x* = 1.

Với *x* = 1 thì $f\left(1\right)=2^n=4096\Leftrightarrow n=12$.

Ta có khai triển: $f\left(x\right)=\left(1-x\right)^{12}+x\left(1+x\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(-x\right)^k+x\sum_{m=0}^{12}C_{12}^{m}x^m$

$$=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(-x\right)^k+\sum_{m=0}^{12}C_{12}^{m}x^{m+1}$$

Hệ số a_4 tương ứng với x^4 trong khai triển do đó ta phải có:

$$\begin{cases} k = 4 \\ m+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ m = 3 \end{cases}$$

Vậy $a_4 = C_{12}^4 + C_{12}^3 = 715$.

Ví dụ 6: Biết số hạng thứ tư trong khai triển $\left(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ bằng 20m và hệ số tổ hợp thứ tư bằng 5 lần hệ số tổ hợp thứ 2 trong khai triển, $m \in \mathbb{N}^*$. Tìm *x* ?

Đề tuyển sinh khối A năm 2002

Phân tích: Ta phải lập được phương trình ẩn *m* từ giả thiết của bài toán, chú ý đến số hạng thứ *i* trong khai triển thì *k* nhận giá trị nào?

Lời giải.

Trong khai triển $\left(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ hệ số tổ hợp thứ tư bằng 5 lần hệ số tổ hợp thứ 2 tức là: $C_m^3 = 5C_m^1 \Leftrightarrow m = 7$.

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{7-k} \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^k = \sum_{k=0}^{7} C_7^k 2^{7\frac{x-1}{2} - k\frac{5x-3}{6}}$$

- Số hạng thứ tư trong khai triển ứng với *k* = 3 ta có phương trình:

$$C_7^3 2^{7\frac{x-1}{2} - 3\frac{5x-3}{6}} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ví dụ 7. Cho khai triển $(1+2x)^{30}$. Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số của số hạng khai triển.

Phân tích: Trong (*n* + 1) hệ số của khai triển ta phải tìm được hệ số có giá trị lớn nhất tức là ta phải biết được trong dãy các hệ số của khai triển thì các hệ số đó tăng hay giảm và tăng, giảm đến hệ số thứ bao nhiêu của khai triển. Từ đó ta có thể lập dãy số tăng, giảm của các hệ số và so sánh chúng để tìm hệ số có giá trị lớn nhất.

Lời giải

- Ta có: $(1+2x)^{30} = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k 2^k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{30} x^{30}$ với $k \in \mathbb{N}$

- Xét hai hệ số tổng quát trong khai triển là $a_k = 2^k C_{30}^k$ và $a_{k+1} = 2^{k+1} C_{30}^{k+1}$

- Giả sử $a_{k+1} < a_k \Leftrightarrow 2^{k+1} C_{30}^{k+1} < 2^k C_{30}^k \Leftrightarrow 59 - 3k < 0 \Leftrightarrow k > \frac{59}{3}$ hay $k > 19,6$

Với $k > 19,6$ thì $a_{k+1} < a_k$ tức là từ số hạng thứ 20 trở đi ta có:

$a_{20} > a_{21} > .... > a_{30} \Leftrightarrow max\{\mathrm{a_i}\}_{i=20}^{30} = a_{20}$ (1).

Với $k \le 19,6$ thì $a_{k+1} > a_k$ tức là $a_0 < a_1 < .... < a_{19} \Rightarrow max\{\mathrm{a_j}\}_{j=0}^{19} = a_{19}$ (2).

Từ (1) và (2) ta sẽ so sánh trực tiếp hai giá trị a_{19} và a_{20}.

Xét tỉ số: $\frac{a_{20}}{a_{19}} = \frac{2^{20} C_{30}^{20}}{2^{19} C_{30}^{19}} = \frac{11}{10} > 1 \Leftrightarrow a_{20} > a_{19}$.

Vậy hệ số lớn nhất trong các hệ số của các số hạng trong khai triển là $a_{20} = 2^{20} C_{30}^{20}$.

3. Bài tập tự luyện.

[1]. Cho *n* là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 255$. Tìm số hạng chứa x^{14} trong khai triển $\left(1 + x + 3x^2\right)^n$.

[2]. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3 - 4x\right)^{2n}$, biết *n* là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

[3]. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(2 + x\right)^n$, biết *n* là số nguyên dương thỏa mãn: $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + ... + \left(-1\right)^n 3^0 C_n^n = 2048$.

Đề tuyển sinh khối B năm 2007.

[4]. Với *n* là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển của $P\left(x\right) = \left(x^2 + 1\right)^n \left(x + 2\right)^n$. Tìm *n* để $a_{3n-3} = 26n$.

Đề tuyển sinh khối D năm 2003.

[5]. Biết tổng các hệ số của số hạng thứ hai và thứ ba trong khai triển $\left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ bằng 25,5. Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển với *x* > 0.

[6]. Tìm x sao cho khai triển $\left(\sqrt{2^{\log\left(10-3^x\right)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right)^n$ - (với n nguyên dương) có số hạng thứ sáu bằng 21 và các hệ số của số hạng thứ 2, 3, 4 trong khai triển trên là các số hạng thứ 1, 3, 5 của một cấp số cộng.

[7]. Tìm số nguyên dương n biết số hạng thứ 9 trong khai triển $\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\right)^n$ có hệ số lớn nhất.

[8]. Cho khai triển $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x\right)^n$ với n nguyên dương (1).

Biết hạng tử thứ 11 trong khai triển (1) có hệ số lớn nhất, tìm n.

[9]. Cho khai triển $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ với $a>0,b>0$. Tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau.

[10]. Cho khai triển $(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$, biết số nguyên dương n thỏa mãn $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+...+\frac{a_n}{2^n}=4096$. Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số.

Đề tuyển sinh khối A năm 2008.

[11]. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $5C_n^{n-1}=C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton $\left(\frac{nx^2}{14}-\frac{1}{x}\right)^n$, $x\neq 0$.

Đề tuyển sinh khối A năm 2012.

[12]. Tìm hệ số của x^{13} trong khai triển $P(x)=\left(\frac{1}{4}+x+x^2\right)^3.(2x+1)^{3n}$. Biết n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^3+C_n^2=14n$.

Đề thi thử đại học lần 1 năm 2014 Trường Lê Quý Đôn.

[13]. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+x^2\right)^n$ với $x\neq 0$. Biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $2C_n^1+2C_n^2+....+2C_{n2}^{n-1}=2^{100}-2-C_{2n}^n$.

Dạng 3: Chứng minh các đẳng thức tổ hợp bằng cách sử dụng khai triển nhị thức Newton.

1. Phân tích và đưa ra phương pháp chung cho dạng.

- Vận dụng khai triển $(a+b)^n$ hoặc đặc biệt ta có thể dùng khai triển $(1+x)^n$, sau đó chọn cặp giá trị *a, b* thích hợp hoặc giá trị của *x* thích hợp ta được đẳng thức tổ hợp tương ứng.

- Chú ý:

+ Thấy tổ hợp C_n^k ứng với nhị thức $(1+x)^n$.

+ Thấy tổ hợp C_{2n}^k ứng với nhị thức $(1+x)^{2n}$.

+ Để khử các tổ hợp chẵn (lẻ) ta chọn hai giá trị đối nhau của *x* trong cùng một khai triển của nhị thức với đa thức biến *x* rồi cộng hai hệ thức.

- Vận dụng khai triển $(1+x)^n.(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$ với $n,m\in\mathbb{N}^*$ bằng cách so sánh hệ số của x^k ở hai vế ta được đẳng tổ hợp tương ứng. Chú ý hệ số của số hạng trong khai triển vế trái có dạng tích của hai tổ hợp: $C_n^k.C_m^i$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

$$C_{2n}^0+C_{2n}^2+....+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1} \text{ với } n\in\mathbb{N}^*.$$

Phân tích: Ta thấy rằng bài toán yêu cầu chứng minh tổng các tổ hợp chẵn bằng tổng các tổ hợp lẻ như vậy ta phải vận dụng khai triển nào của nhị thức với số mũ là bao nhiêu?

<u>Lời giải</u>

Thật vậy ta xét khai triển sau:

$$(1-x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k(-1)^kx^k=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2-...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

- Với $x=1$ ta có khai triển

$$0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-...-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$$

$$\Leftrightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1} \quad (dpcm)$$

Ví dụ 2: Chứngminh rằng:

$$1-10C_{2n}^{1}+10^{2}C_{2n}^{2}-10^{3}C_{2n}^{3}+...-10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+10^{2n}C_{2n}^{2n}=81^{n} \text{ với } n\in \mathbb{N}^{*}.$$

Phân tích: Ta thấy rằng số mũ của 10 trong đẳng thức tăng theo chỉ số của *k* trong một khai triển nhị thức nào đó và chú ý rằng đẳng thức tổ hợp này đan dấu. Như vậy ta có thể vận dụng khai triển nào là thích hợp?

<u>Lời giải</u>

Thật vậy ta xét khai triển sau:

$$(1-x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}(-1)^{k}x^{k}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}-...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

- Chọn $x = 10$ thay vào khai triển trên ta có:

$$(1-10)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}(-1)^{k}10^{k}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}.10+C_{2n}^{2}.10^{2}-...-C_{2n}^{2n-1}.10^{2n-1}+C_{2n}^{2n}.10^{2n}$$

$$\Leftrightarrow 81^{n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}.10+C_{2n}^{2}.10^{2}-...-C_{2n}^{2n-1}.10^{2n-1}+C_{2n}^{2n}.10^{2n}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $\left(C_{n}^{0}\right)^{2}+\left(C_{n}^{1}\right)^{2}+...+\left(C_{n}^{n}\right)^{2}=C_{2n}^{n}$ với $n\in \mathbb{N}^{*}$.

Phân tích: Ta thấy rằng mỗi số hạng của vế trái là tích của hai tổ hợp nhưng bằng nhau. Vậy có dạng tích của hai tổ hợp thì ta vận dụng dạng khai triển nào và số mũ của khai triển đó bằng bao nhiêu? Và đẳng thức tổ hợp trên là hệ số của *x* mũ bao nhiêu ở hai vế?

<u>Lời giải</u>

Xét hệ số của x^{n} khai triển $(1+x)^{n}(1+x)^{n}=(1+x)^{2n}$ theo hai cách:

- Ta có: $(1+x)^{n}(1+x)^{n}=\sum_{i=0}^{n}C_{n}^{i}x^{i}\sum_{j=0}^{n}C_{n}^{j}x^{j}$.

Hệ số của x^{n} bằng $a_{n}=C_{n}^{0}C_{n}^{n}+C_{n}^{1}C_{n}^{n-2}+C_{n}^{2}C_{n}^{n-2}+...+C_{n}^{n}C_{n}^{0}$

$$=\left(C_{n}^{0}\right)^{2}+\left(C_{n}^{1}\right)^{2}+\left(C_{n}^{2}\right)^{2}+....+\left(C_{n}^{n}\right)^{2} \quad (1).$$

Mặt khác hệ số của x^{n} trong $(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}x^{k}$ bằng: $a_{n}=C_{2n}^{n}$ (2).

- Từ (1) và (2) suy ra $C_{2n}^{n}=\left(C_{n}^{0}\right)^{2}+\left(C_{n}^{1}\right)^{2}+\left(C_{n}^{2}\right)^{2}+....+\left(C_{n}^{n}\right)^{2}$ (đpcm).

Ví dụ 4: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+C_{2n}^{5}....+C_{2n}^{2n-1}=2048$ với C_{n}^{k} là tổ hợp chập *k* của *n* phần tử.

Đề tuyển sinh khối D năm 2006.

Phân tích: Ta thấy trong đẳng thức tổ hợp để tìm *n* chỉ chứa các tổ hợp với chỉ số lẻ tức là tổ hợp cac chỉ số chẵn bị triệt tiêu. Như vậy ta pahir dùng các khai triển nào để khử các tổ hợp chẵn hoặc lẻ?

<u>Lời giải</u>

Xét khai triển $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^n$

- Chọn $x = 1$ ta được $(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ (1)

- Chọn x = -1 ta được $(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ (2)

- Lấy (1) trừ (2) ta được $2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}\right)$

- Theo giả thiết ta có phương trình $\Leftrightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$

$$\Leftrightarrow 2^{2n-1} = 2048 \Leftrightarrow 2n-1 = 11 \Leftrightarrow n = 6.$$

Vậy *n* = 6 là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathrm{N}^*$ thì:

a) $C_5^0.C_n^k + C_5^1.C_n^{k-1} + ... + C_5^5.C_n^{k-5} = C_{n+5}^k$ với $5 \le k \le n$

b) $C_m^0.C_n^k + C_m^1.C_n^{k-1} + ... + C_m^m.C_n^{k-m} = C_{n+m}^k$ với $m \le k \le n$

Phân tích: Tương tự ví dụ 3 ta có vế trái của các đẳng thức tổ hợp cần chứng minh mối hạng tử có dạng tích của hai tổ hợp, như vậy ta sẽ sử dụng khai triển của nhị thức nào và số mũ bao nhiêu?

<u>Lời giải</u>

a) Xét khai triển sau: $(1+x)^5(1+x)^n = (1+x)^{n+5}$

- Khai triển nhị thức ở hai vế

$$VT = \sum_{i=0}^{5} C_5^i.x^i.\sum_{j=0}^{n} C_n^j.x^j = \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{n} C_5^i C_n^j.x^{i+j}; \quad VP = \sum_{m=0}^{n+5} C_{n+5}^m x^m$$

- Tìm hệ số của x^k ở hai vế ta được đẳng thức tổ hợp cần chứng minh

$$C_5^0.C_n^k + C_5^1.C_n^{k-1} + ... + C_5^5.C_n^{k-5} = C_{n+5}^k$$

b) Tương tự chứng minh tương tự.

3. Bài tập tự luyện.

[1]. Chứng minh rằng với *n* nguyên dương ta có:

$$1+4C_n^1+4^2C_n^2+...+4^{n-1}C_n^{n-1}+4^n=5^n$$

[2]. Chứng minh rằng với n nguyên dương ta có:

$$C_{2n}^0.3^0+C_{2n}^2.3^2+C_{2n}^4.3^4+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}=2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$$

[3]. Áp dụng khai triển nhị thức Newton $\left(x^2+x\right)^{100}$, chưng minh rằng:

$$100C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101C_{101}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+....-199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}=0$$

[4]. Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^nC_n^n=243$.

Đề tuyển sinh khối D năm 2002.

[5]. Chứng minh rằng mọi cặp số nguyên *k, n* $\left(1\le k\le n\right)$ta luôn có: $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.

Tìm số nguyên $n>4$ thỏa mãn: $2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+....+\left(3n+2\right)C_n^n=1600$.

[6]. Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên *k, n* $\left(0\le k\le n-2015\right)$ ta luôn có:

$$C_{2015}^0.C_n^k+C_{2015}^1.C_n^{k+1}+C_{2015}^2.C_n^{k+2}+...+C_{2015}^{2015}.C_n^{k+2015}=C_{n+2015}^{k+2015}$$

Dạng 4: Phối hợp đạo hàm và tích phân trong việc sử dụng nhị thức Niutơn. Tính tổng hữu hạn.

1. Phân tích và đưa ra phương pháp chung cho dạng.

a) Sử dụng đạo hàm: mỗi cấp đạo hàm hai vế và chọn giá trị x phù hợp cho ta một hệ thức tổ hợp.

Ta có $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n$

+ Đạo hàm cấp 1: $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+nC_n^nx^{n-1}$

+ Đạo hàm cấp 2: $n(n-1)(1+x)^{n-2}=2C_n^2+2.3C_n^3x+...+n(n-1)C_n^nx^{n-2}$

+ Đạo hàm cấp 3:

$$n(n-1)\left(n-2\right)(1+x)^{n-2}=1.2.3C_n^3+2.3.4C_n^4x+...+n(n-1)\left(n-2\right)C_n^nx^{n-3}$$

....

* Chú ý:

- Số các số hạng giảm dần sau mỗi lần đạo hàm, đạo hàm cấp k còn $\left(n+1-k\right)$ số hạng.

- Nếu thấy hệ số có dạng kC_n^k thì bài toán liên quan đến đạo hàm của $(1+x)^n$.

b) Sử dụng tích phân.

Ta lấy: $\int_a^b (1+x)^n dx = \int_a^b (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n) dx$

$$VT = \int_a^b (1+x)^n d(1+x) = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{1}{n+1}\left[(1+b)^{n+1} - (1+a)^{n+1}\right]$$

$$VP = \left.\left(C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right)\right|_a^b = \left.\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}\right)\right|_a^b = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)$$

Như vậy ta có: $\frac{1}{n+1}\left[(1+b)^{n+1} - (1+a)^{n+1}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)$.

- Chọn cận tích phân (chọn giá trị *a*, *b*) cho phù hợp ta được một đẳng thức tổ hợp.

* Chú ý:

- Nếu thấy hệ số có dạng $\frac{1}{k+1} C_n^k$ thì bài toán liên quan đến tích phân của $(1+x)^n$.

- Nhiều khi ta còn phải nhân cả hai vế với x, x^2...rồi mới lấy đạo hàm hoặc tích phân hai vế.

c) Phương pháp chung:

- Chọn một hàm số $f(x)$ thích hợp với đầu bài. Hàm số này thường biết ngay dạng của nó dựa vào chính các biểu thức cho trong đầu bài.

- Sau khi chọn được hàm số thích hợp ta tiến hành lấy đạo hàm hoặc thích phân hàm số đó theo hai cách:

+ Lấy đạo hàm hoặc tích phân trực tiếp hàm số.

+ Lấy đạo hàm hoặc tích phân sau khi đã sử dụng khai triển nhị thức Newton hàm số đã chọn.

- Với phép lấy đạo hàm ta chọn một giá trị *x* phù hợp thay vào hai biểu thức rồi tính đạo hàm của hàm số tại giá trị đó. Với phép lấy tích phân thì ta chọn cận tích phân thích hợp rồi tính kết quả theo hai cách trên.

- Đồng nhất hai kết quả ta sẽ giải được bài toán ban đầu.

3. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Chứng minh

[1]. $1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + kC_n^k + ... + nC_n^n + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$

[2]. $1C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$

[3]. $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

[4]. $1.C_n^0 + 2.C_n^1 + ... + (n+1)C_n^n = (n+2).2^{n-1}$

Phân tích: ta thấy vế trái của các đẳng thức tổ hợp cần chứng minh có dạng kC_n^k hoặc $k(k-1)C_n^k$, tức là ta thấy dạng đạo hàm của nhị thức sau khai triển. Như vậy ta sử dụng phương pháp đạo hàm để chứng minh các đẳng thức trên.

<u>Lời giải</u>

[1]. Xét triển khai $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$ (1)

\+ Đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1}$ (*)

\+ Chọn $x = 1$ thay vào (*) ta có:

$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$ $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

[2]. Với (*) chọn $x = -1$ ta được:

$n(1-1)^{n-1} = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (-1)^{n-1}nC_n^n$

$\Leftrightarrow C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0 \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

[3]. $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

Sử dụng đạo hàm cấp 2 của khai triển (1) và chọn x = 1 ta được đẳng thức cần chứng minh.

[4]. $1.C_n^0 + 2.C_n^1 + ... + (n+1)C_n^n = (n+2).2^{n-1}$

Nhận xét: Với đẳng thức này nếu ta lấy đạo hàm luôn hai vế của (1) thì giá trị C_n^0 sẽ không còn trong đẳng thức, vì vậy trước khi lấy đạo hàm ta phải nhân vào cả hai vế với *x*.

\- Nhân cả hai vế của triển khai $(1+x)^n$ với x ta được:

$x(1+x)^n = C_n^0x + C_n^1x^2 + C_n^2x^3 + ... + C_n^nx^{n+1}$

\- Đạo hàm hai vế ta được:

$(1+x)^n + x.n(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + ... + (n+1)C_n^nx^n$

$\Leftrightarrow (1+x)^{n-1}(1+x+nx) = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + (n+1)C_n^n x^n$

- Dựa vào đẳng thức cần chứng minh ta chọn $x = 1$ ta được:

$(n+2)2^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n$ $\Rightarrow$điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Đặt $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \qquad (n \in N)$

a) Tính I_n

b) suy ra hệ thức: $\frac{1}{1}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}.C_n^n = \frac{2.4...(2n)}{3.5...(2n+1)}$

<u>Lời giải</u>

a) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần đặt:

$$\begin{cases} (1-x^2)^n = u \\ dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n((1-x^2)^{n-1}.(-2x)dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = x(1-x^2)^n \Big|_0^1 - \int_0^1 x.n(1-x^2)^{n-1}(-2x)dx$$

$$= 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx = 2n\int_0^1 (x^2-1+1)(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$= 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx - 2n\int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

$$= 2nI_{n-1} - 2nI_n$$

$$\Leftrightarrow \quad (2n+1)I_n = 2nI_{n-2} \Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

Mà $\quad I_{n-1} = \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}I_{n-2} = \frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2} = \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-3)}I_{n-3}$

$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)...2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)...3}I_0$$

Mà $\qquad I_0 = \int_0^1 (1-x^2)^0 dx = x\Big|_0^1 = 1$

Vậy $\qquad I_n = \frac{2.4.6...(2n)}{3.5.7...(2n+1)}$

b) suy ra hệ thức: $\frac{1}{1}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}.C_n^n = \frac{2.4....(2n)}{3.5....(2n+1)}$

Mặt khác: $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1(\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-x^2)^k)dx=\int_0^1(\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kx^{2k})dx$

$$=\int_0^1(C_n^0+(-1)C_n^1x^2+(-1)^2C_n^2x^4+...+(-1)^kC_n^nx^{2n})dx$$

$$=(C_n^0.x-C_n^1\frac{x^3}{3}+C_n^2\frac{x^5}{5}-C_n^3\frac{x^7}{7}+...+(-1)^nC_n^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1})\Big|_0^1$$

$$=C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3+...+(-1)^n\frac{1}{2n+1}.C_n^n$$

Theo câu (a) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3:

[1]. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}.C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

[2]. Cho n nguyên dương. Chứng minh:

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1.2+\frac{1}{3}C_n^2 2^2+\frac{1}{4}C_n^3 2^3+...+\frac{1}{n+1}C_n^n 2^n=\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}\quad.$$

Phân tích: Với hai đẳng thức cần chứng minh trên thì có nhận xét gì về dạng của mỗi số hạng trong tổng của vế trái. Từ đó ta sử dụng phương pháp đạo hàm hay tích phân để giải quyết bài toán?

<u>Lời giải</u>

[1]. Xét $\int_0^1(1+x)^n dx=\int_0^1(\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k)dx=\int_0^1(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n)dx$

$$=(C_n^0x+C_n^1\frac{x^2}{2}+C_n^2\frac{x^3}{3}+...+C_n^n.\frac{x^{n+1}}{n+1})\Big|_0^1=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n\quad(1).$$

Mà $\int_0^1(1+x)^n dx=\int_0^1(1+x)^n d(1+x)=\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\quad(2).$

Từ (1,2) ta có điều phải chứng minh.

[2]. n nguyên dương. Chứng minh:

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1.2+\frac{1}{3}C_n^2 2^2+\frac{1}{4}C_n^3 2^3+...+\frac{1}{n+1}C_n^n 2^n=\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}\quad(1).$$

Xét $(1+2x)^n=C_n^0+C_n^1(2x)^1+C_n^2(2x)^2+C_n^3(2x)^3+...+C_n^n(2x)^n$.

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\int_a^b (1+2x)^n dx = \int_a^b (C_n^0 + C_n^1.2x + C_n^2 2^2 x^2 + C_n^3 2^3 x^3 + ... + C_n^n 2^n x^n)dx$$

$$= (C_n^0 x + C_n^1.2.\frac{x^2}{2} + C_n^2.2^2.\frac{x^3}{3} + C_n^3.2^3\frac{x^4}{4} + ... + C_n^n.2^n.\frac{x^{n+1}}{n+1})\Big|_a^b$$

Để có các hệ số của vế trái đẳng thức (1) chọn $a=0; b=1$ ta được:

$$\int_0^1 (1+2x)^n dx = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1.2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^2 + \frac{1}{4}C_n^3 2^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n 2^n \qquad (2).$$

Mặt khác:

$$\int_0^1 (1+2x)^n dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+2x)^n d(1+2x) = \frac{1}{2}\frac{(1+2x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}(3^{n+1)}-1) = \frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)} \quad (3)$$

Từ (2,3) $\Rightarrow$ (1).

Ví dụ 4: Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

Đề tuyển sinh khối A năm 2005.

Phân tích: Tương tự như các ví dụ trên hãy tự phân tích và lựa chọn phương pháp cho thích hợp để giải quyết bài toán.

Lời giải

Chọn hàm số $f(x) = (1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$.

Sử dụng phép toán đạo hàm hai vế của hàm số ta được:

- Đạo hàm vế trái: $f'(x) = (2n+1)(1+x)^{2n}$.

- Đạo hàm vé phải $f'(x) = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2 x + ... + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n}$.

Dựa vào đẳng thức đã cho ta chọn $x=-2$ khi đó ta có:

$$\begin{cases} f'(-2) = (2n+1)(-1)^{2n} = 2n+1 \\ f'(-2) = C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + ... + (2n+1)(-2)^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + ... + (2n+1)(-2)^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2n+1.$$

Theo bài ta có phương trình: $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$.

Ví dụ 5: Cho n là số nguyên dương .Tính tổng:

$$S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

Đề tuyển sinh khối B năm 2003.

Phân tích: Ta thấy số hạng trong tổng có dạng $\frac{1}{k+1}C_n^k$, như vậy ta sẽ sử dụng tích phân trong quá trình tính tổng. Với biểu thức $\left(2^{k+1}-1\right)$ để gợi ý cho ta cách chọn cận của tích phân.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n$.

Lấy tích phân hai vế với cận $a<b$ ta được:

- Tích phân vế trái.

$$\int_a^b \left(1+x\right)^n dx=\frac{1}{n+1}\left(1+x\right)^{n+1}\Big|_a^b=\frac{1}{n+1}\left(1+b\right)^{n+1}-\frac{1}{n+1}\left(1+a\right)^{n+1}.$$

- Tích phân vế phải.

$$\int_a^b\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n\right)dx$$

$$=C_n^0x\Big|_a^b+\frac{1}{2}C_n^1x^2\Big|_a^b+\frac{1}{3}C_n^2x^3\Big|_a^b+\frac{1}{4}C_n^3x^4\Big|_a^b+...+\frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\Big|_a^b$$

$$=C_n^0\left(b-a\right)+\frac{1}{2}C_n^1\left(b^2-a^2\right)+\frac{1}{3}C_n^2\left(b^3-a^3\right)+\frac{1}{4}C_n^3\left(b^4-a^4\right)+...+\frac{1}{n+1}C_n^n\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)$$

- Dựa vào tổng S ta chọn cận tích phân $a=1,b=2$. Như vậy ta có:

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1\left(2^2-1^2\right)+\frac{1}{3}C_n^2\left(2^3-1^3\right)+\frac{1}{4}C_n^3\left(2^4-1^4\right)+...+\frac{1}{n+1}C_n^n\left(2^{n+1}-1^{n+1}\right)$$

$$=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1\left(2^2-1\right)+\frac{1}{3}C_n^2\left(2^3-1\right)+\frac{1}{4}C_n^3\left(2^4-1\right)+....+\frac{1}{n+1}C_n^n\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$=C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+\frac{2^4-1}{4}C_n^3+....+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n=S$$

Vậy $S=\frac{1}{n+1}\left(1+2\right)^{n+1}-\frac{1}{n+1}\left(1+1\right)^{n+1}=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

Ví dụ 6: Tính các tổng hữu hạn sau:

a) $S_1=1.2^0C_n^1+2.2^1C_n^2+3.2^2C_n^3+...+n.2^{n-1}C_n^n$

b) $S_2=1.C_{2015}^0+2.C_{2015}^1+3C_{2015}^2+...+2016C_{2015}^{2015}$

Lời giải:

a) Ta thấy biểu thức có dạng $k.C_n^k$ nên ta sử dụng đến đạo hàm của nhị thức $\left(1+x\right)^n$ và chọn giá trị x phù hợp thì ta được tổng trên.

Thật vậy: ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

- Đạo hàm hai vế ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1}$ (*)

- Dựa vào biểu thức tổng S_1 để chọn giá trị của x cho thích hợp

Chọn $x=2$ thay vào (*) ta được:

$$n\left(1+2\right)^{n-1} = 1.2^0 C_n^1 + 2.2^1 C_n^2 + 3.2^2 C_n^3 + ... + n.2^{n-1} C_n^n$$

- Vậy $S_1 = n.3^{n-1}$.

b) Ta thấy biểu thức vẫn chứa dạng đạo hàm nhưng lại chứa cả C_n^0 tức là giá trị này không bị mất sau khi lấy đạo hàm.

- Nhân vào hai vế với *x* rồi đạo hàm hai vế của khai triển nhị thức:

$$(1+x)^{2015} = C_{2015}^0 + C_{2015}^1 x + C_{2015}^2 x^2 + ... + C_{2015}^{2015} x^{2015}$$

$$\Rightarrow x(1+x)^{2015} = C_{2015}^0 .x + C_{2015}^1 x^2 + C_{2015}^2 x^3 + ... + C_{2015}^{2015} x^{2016}$$

- Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$(1+x)^{2015} + x.2015(1+x)^{2014} = C_{2015}^0 + 2C_{2015}^1 x + 3C_{2015}^2 x^2 + ... + 2016C_{2015}^{2015} x^{2015}$$

- Chọn $x=1$ ta được:

$$(1+1)^{2015} + 1.2015(1+1)^{2014} = C_{2015}^0 + 2C_{2015}^1 + 3C_{2015}^2 + ... + 2016C_{2015}^{2015}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2015} + 2015.2^{2014} = C_{2015}^0 + 2C_{2015}^1 + 3C_{2015}^2 + ... + 2016C_{2015}^{2015}$$

- Vậy $S_2 = 2017.2^{2014}$

Ví dụ 6: Tính tổng

$$S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \frac{2^4-1}{4}C_n^3 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

Nhận xét: Ta thấy biểu thức của tổng có dạng $\frac{1}{k+1}C_n^k$ như vậy ta sử dụng tích phân hai vế với cận thích hợp.

<u>Lời giải</u>:

- Lấy tích phân hai vế của khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$ với cận thích hợp ta được:

$$\int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2 = \left(C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right)\Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) = C_n^0 + \frac{1}{2}\left(2^2 - 1\right)C_n^1 + \frac{1}{3}\left(2^3 - 1\right)C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)C_n^n$$

-Vậy $S = \dfrac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$

4. Bài tập tự luyện.

[1]. a) Tính $I = \int_0^1 x(1-x)^{19} dx$.

b) chứng minh: $\frac{1}{12}C_{19}^0 - \frac{1}{3}C_{19}^1 + \frac{1}{4}C_{19}^2 + ... + \frac{1}{20}C_{19}^{18} - \frac{1}{21}C_{19}^{19} = \frac{1}{420}$.

[2]. Cho n là số nguyên thỏa mãn $\dfrac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 35$ với $n \geq 3$. Hãy tính tổng:

$$S = 2^2 C_n^2 - 3^2 C_n^3 + ... + (-1)^n n^2 C_n^n.$$

[3]. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n+1}.$$

Đề tuyển sinh khối A năm 2007.

[4]. a) Tính tích phân: $I = \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx$

b) Chứng minh hệ thức sau: $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{3n+3}$.

[5]. Chứng minh: $\dfrac{2^n C_n^0}{n+1} + \dfrac{2^{n-1} C_n^1}{n} + ... + \dfrac{2^1 C_n^{n-1}}{2} + \dfrac{2^0 C_n^n}{1} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2(n+1)}$.

(n là số nguyên dương, C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

[6]. Tính tổng: $T = \frac{2^6}{1}C_6^0 + \frac{2^5}{2}C_6^1 + \frac{2^4}{3}C_6^2 + \frac{2^3}{4}C_6^3 + \frac{2^2}{5}C_6^4 + \frac{2^1}{6}C_6^5 + \frac{2^0}{7}C_6^6$.

[7]. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $P(x) = \left(1 + x + x^3 + x^4\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $\frac{1}{n+1}C_n^0 - \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n-1}C_n^2 - ..... + (-1)^n C_n^n = -\frac{1}{2014}$.

[8]. Tìm số hạng không chứa *x* trong khia triển $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^n$ với $x\neq 0$ biết *n* là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=256n$.

[9]. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)^n$ với $x\neq 0$ biết *n* là số nguyên dương thỏa mãn: $\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3-....+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{20}{21}$.

3. Khả năng áp dụng của giải pháp.

- Áp dụng các dạng 1, 2, 3 cho học sinh lớp 11 và cho học sinh ôn thi học sinh giỏi vòng tỉnh.
- Áp dụng ôn thi đại học và cao đẳng cho học sinh lớp 12.

4. Kết quả, hiệu quả mang lại.

- Nội dung trong sáng kiến được áp dụng một phần cho học sinh lớp 11 và đặc biệt sử dụng cho học sinh ôn thi đại học và cao đẳng.
- Với các dạng toán đã nêu tôi tin rằng chuyên đề này sẽ cung cấp cho học sinh một lượng kiến thức khá tổng hợp về nhị thức Newton và các kỹ năng cơ bản để xử lí khi gặp các bài tập về nhị thức Newton.

5. Đánh giá về phạm vi ảnh hưởng của sáng kiến.

- Nâng cao chất lượng ôn thi đại và cao đẳng đối với học sinh lớp 12.
- Có thể vận dụng một phần cho học sinh lớp 11, ôn thi học sinh giỏi.
- Có thể vận dụng rộng cho các trường THPT trong tỉnh.

6. Kiến nghị, đề xuất: dùng cho các giáo viên ôn thi đại học và cao đẳng.

Điện Biên Phủ, Ngày 10 tháng 4 năm 2015

Người làm sáng kiến

Hà Thị Biên Thùy