Phụ lục

KHAI THÁC BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 10

Tác giả: Hán Văn Sơn
Giáo viên THPT chuyên Lê Quý Đôn

A. Sự cần thiết, mục đích của việc thực hiện sáng kiến:

- Sự cần thiết của việc thực hiện sáng kiến:

+ *"Bất đẳng thức Cauchy"* là phần kiến thức được đề cập trong chương IV: Bất đẳng thức.Bất phương trình - Phần Đại số lớp 10 môn Toán. Các dạng bài toán về bất đẳng thức Cauchy là một trong những chuẩn kiến thức, kĩ năng cần đạt được trong chương trình Toán lớp 10, thường xuyên được đề cập đến trong các bài kiểm tra định kì, thi THPT quốc gia và thi chọn học sinh giỏi các cấp.

+ Tâm lí đa số học sinh cho rằng học bất đẳng thức là khó nên rất ngại học, khi gặp những bài toán có yêu cầu khác biệt so với chương trình sách giáo khoa thì học sinh thường lúng túng, không có khả năng tưởng tượng, không định hướng được dẫn đến không có phương pháp tư duy để giải bài toán. Hơn nữa trong chương trình sách giáo khoa cơ bản viết theo yêu cầu giảm tải dẫn đến thiếu một số công cụ giải toán, số lượng bài tập về bất đẳng thức Cauchy không nhiều và chỉ có dạng cơ bản nên học sinh không nhận diện được tất cả các dạng toán và chưa được hướng dẫn một cách hệ thống các phương pháp để giải quyết các bài toán đó. …Bởi vậy việc giải một số bài toán gặp nhiều khó khăn.

- Mục đích thực hiện sáng kiến:

+ Với việc nghiên cứu đề tài này, bản thân tôi đã được nâng cao hơn về trình độ chuyên môn, nghiệp vụ.

+ Với mong muốn giúp các em học sinh rèn luyện kĩ năng và tư duy giải quyết các bài toán liên quan đến bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức Cauchy nói riêng, đặc biệt các dạng toán thường xuất hiện trong đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh và quốc gia.

B. Phạm vi triển khai thực hiện:

- Kiến thức: Bất đẳng thức Cauchy trong chương trình toán 10.

- Học sinh: Khối 10 trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, đặc biệt đối với học sinh lớp chuyên toán 10.

1.Tình trạng giải pháp đã biết

-Bất đẳng thức Cauchy khá là quen thuộc với thầy cô và các em học sinh. Nội dung bất đẳng thức Cauchy được phát biểu bằng lời rất đơn giản:" trung bình cộng luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân".

- Đã hệ thống các kiến thức cơ bản về bất đẳng Cauchy thức nhưng chưa đầy đủ, chưa bổ sung được phần đơn vị kiến thức nâng cao.

- Chỉ đưa ra một số dạng toán chứng minh bất đẳng thức cơ bản. Với một số dạng bài toán phương pháp giải chưa "tự nhiên" làm cho các em học sinh cảm thấy lung túng khi học toán, chưa phân tích được cho học sinh nhận thấy phương pháp tối ưu nhất để giải quyết bài toán.

- Hệ thống các bài tập rèn luyện kĩ năng cho học sinh chưa nhiều.

2.Nội dung giải pháp

2.1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

2.1.1.Một số bất đẳng thức thông dụng

* Bất đẳng thức Cauchy cho hai số

Cho 2 số thực không âm a,b khi đó: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi a=b

* Bất đẳng thức Cauchy ba số:

Cho 3 số thực không âm a,b,c khi đó: $\frac{a+b+c}{3} \geq 3.\sqrt[3]{abc}$

Dấu = xảy ra khi a=b=c

* Bất đẳng thức Cauchy tổng quát:

Cho n số thực không âm $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ khi đó:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$$

Dấu = xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

*Các bất đẳng thức cơ bản liên quan hay dùng:

1). $a^2 + b^2 \geq 2ab$; Dấu = xảy ra khi a=b

2). $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$; Dấu = xảy ra khi a=b

3). $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$; Dấu = xảy ra khi a=b

4). $ab \geq \frac{-(a^2 + b^2)}{2}$; Dấu = xảy ra khi a=-b

5). Nếu a,b≥ 0 thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; Dấu = xảy ra khi $a = b$

6). Nếu a,b>0 thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$; Dấu = xảy ra khi $a=b$

7). Nếu a,b>0 thì $a+\frac{b^2}{a}\ge 2b$; Dấu = xảy ra khi $a=b$

8). Nếu a,b>0 thì $b+\frac{a^2}{b}\ge 2a$; Dấu = xảy ra khi

9). Nếu a,b > 0.thì: $(a + b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \ge 4$.Dấu '=' xảy ra khi $a=b$

10).Nếu a,b>0 thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$; Dấu = xảy ra khi $a=b$

11). Nếu a,b>0 thì $\frac{1}{ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}$; Dấu = xảy ra khi a=b>0 $a=b$

12). $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc$ .Dấu '=' xảy ra khi $a=b=c$

13). $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \ge ab + ac + bc$.

Dấu '=' xảy ra khi $a=b=c$.

14). Nếu a,b,c > 0. thì: $(a + b + c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \ge 9$.

Dấu '=' xảy ra khi $a=b=c$

15). Nếu a,b,c > 0. thì: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$. Dấu '=' xảy ra khi $a=b=c$.

2.2. KHAI THÁC BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

2.2.1. Dạng sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số :

$\forall$ a, b $\ge$ 0 : $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : a = b

Ví dụ 1 : Cho a, b, c là các số dương thỏa : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le 1$

(TSĐH - Khối A - Năm 2005)

▪Ta có với

$$0<x,y:(x+y)^2\ge 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{x+y}\le\frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=y$

▪ Áp dụng kết quả trên, ta có :

$$\frac{1}{2a+b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)$$
(1)

Tương tự : $\frac{1}{a+2b+c}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2c}\right)$ (2)

$$\frac{1}{a+b+2c} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\right) \quad (3)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$$

Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{4}$

Nhận xét: Dấu "=" sảy ra khi $a=b=c=\frac{3}{4}$

Bài toán không còn tính đối xứng thì giải quyết như thế nào?

Ví dụ 2 : Cho x, y, z là các số dương thỏa : $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=1$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = x + y + z.$$

▪ Ta có :$P = x + y + z = (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)$

$$= 14+\left(\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{9x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{9y}{z}+\frac{4z}{y}\right)$$

$$\ge 14+2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{9x}{z}.\frac{z}{x}}+2\sqrt{\frac{9y}{z}.\frac{4z}{y}} = 14+4+6+12=36$$

▪ Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=1 \\ \frac{4x}{y}=\frac{y}{x}, \frac{9x}{z}=\frac{z}{x}, \frac{9y}{z}=\frac{4z}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=12 \\ z=18 \end{cases}$

▪ Vậy : $P_{min} = 36$ khi $x = 6, y = 12, z = 18$.

Nhận xét: Dấu "=" sảy ra khi $x=6; y=12; z=18$

Bài toán không còn tính đối xứng đã được giải quyết.

Bài toán giải quyết đượcliên quan chặt chẽ tới dấu "=" của đẳng thức

Bài tập tương tự :

1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16c}{a+b-c} \ge 26$$

2. Cho x, y, z > 0 và thỏa : xyz = 1. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P=\frac{yz}{x^2y+x^2z}+\frac{zx}{y^2z+y^2x}+\frac{xy}{z^2x+z^2y}$$

*Hướng dẫn:

1.▪ Đặt : $x=b+c-a; y=c+a-b; z=a+b-c (x,y,z>0)$

$$\Rightarrow a=\frac{y+z}{2}, b=\frac{z+x}{2}, c=\frac{x+y}{2}$$

Khi đó :

$$VT = \frac{4(y+z)}{x} + \frac{9(z+x)}{y} + \frac{16(x+y)}{z} = \left(\frac{4y}{x} + \frac{9x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{16x}{z}\right) + \left(\frac{9z}{y} + \frac{16y}{z}\right)$$

Áp dụng bđt Cauchy , . . . $\Rightarrow$ (đpcm)

2.▪ Đặt : $a = yz; b = zx; c = xy (x, y, z > 0; abc = 1)$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

▪ Áp dụng bđt Cauchy , ta có : $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}\frac{b+c}{4}} = a$,

tương tự : $\frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b$, $\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$

▪ Cộng 3 bđt trên vế theo vế, suy ra : $P \geq . . . \geq \frac{3}{2}$. Kết luận : MinP = $\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

2.2.3. <u>Dạng sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số :</u>

$\forall$ a, b, c $\geq$ 0 : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :a = b = c

<u>Ví dụ 3 :</u> Cho a, b, c là các số dương thỏa : abc = 1.

Chứng minh rằng : $\frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab} + \frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc} + \frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca} \geq 3\sqrt{3}$

(TSĐH - Khối D - Năm 2005)

▪Tacó
:

$$1 + a^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{1.a^3.b^3} = 3ab \Rightarrow \sqrt{1+a^3+b^3} \geq \sqrt{3}.\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$$

Tương tự : $\frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{bc}}$, $\frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ca}}$

▪ Cộng 3 bất đẳng thức trên vế theo vế , ta có :

$$\frac{\sqrt{1+a^3+b^3}}{ab} + \frac{\sqrt{1+b^3+c^3}}{bc} + \frac{\sqrt{1+c^3+a^3}}{ca} \geq \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$$

▪ Lại có : $\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{(abc)^2}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 3$ vì abc = 1

▪ Từ (1) và (2) suy ra : (đpcm) . Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c = 1

<u>Ví dụ 4 :</u> Cho x, y, z là các số dương thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$$

▪ Ta có : $P = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$

$$\geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z}\right)$$

▪ Ngoài ra : $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2x}} = \frac{3}{2}$

Tương tự : $\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \geq \frac{3}{2}$; $\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{2}$

Suy ra : $P \geq \frac{9}{2}$. Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = y = z = 1$

▪ Vậy : $P_{min} = \frac{9}{2}$ khi $x = y = z = 1$

Nhận xét: Dấu "=" sảy ra khi các số hạng bằng nhau

Bài toán có tính đối xứng việc chọn dấu bằng sảy ra rất đơn giản.

***Bài tập tương tự :**

1. Cho a, b, c > 0 và thỏa a + b + c = 1. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$$

2. Cho x, y, z > 0 và thỏa : $x + y + z \geq 6$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{x^3}{y + z} + \frac{y^3}{z + x} + \frac{z^3}{x + y}$$

Hướng dẫn :

1. Ta có : $(VT) = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{3}{\sqrt[3]{ab.bc.ca}}$

$$\geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} =$$

$$= \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca}\right) + \frac{7}{ab + bc + ca}$$

$$\geq \frac{9}{(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + (ab + bc + ca)} + \frac{21}{3(ab + bc + ca)}$$

$$\geq \frac{9}{(a + b + c)^2} + \frac{21}{(a + b + c)^2} = \frac{30}{(a + b + c)^2} \geq 30$$

2. ▪ Áp dụng bđt Cauchy , ta có : $\frac{x^3}{y + z} + \frac{y + z}{2} + 2 \geq 3x$,

$$\frac{y^3}{z+x} + \frac{z+x}{2} + 2 \geq 3y\,, \quad \frac{z^3}{x+y} + \frac{x+y}{2} + 2 \geq 3z$$

▪ Cộng 3 bđt trên vế theo vế, suy ra : $P \geq 2(x+y+z) - 6 \geq 2.6 - 6 = 6$.

Kết luận : MinP = 6 $\Leftrightarrow x = y = z = 2$

2.2.4.Dạng 3 sử dụng phép nhóm abel

Khi chứng minh những bất đẳng thức của một hay nhiều dãy số có thứ tự người ta thường sử dụng phép nhóm abel để sử dụng dễ dàng các điều kiện thứ tự đó. Phép nhóm Abel được cho bởi đẳng thức mà chúng ta sẽ chứng minh dưới đây.

Cho hai dãy số thực $a_{1,}a_{2,},...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$. Kí hiệu $s_k = \sum_{i=1}^{n-1} s_i, k = \overline{1,n}$ ta có đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} s_i\left(b_i - b_{i+1}\right) + s_n b_n$$

Chứng minh

Kí hiệu $s_0 = 0$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \left(s_i - s_{i-1}\right) b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i b_i - \sum_{i=1}^{n} s_{i-1} b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i b_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i b_{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} s_i\left(b_i - b_{i+1}\right) + s_n b_n.$$

Để có được phương pháp giải bất đẳng thức sử dụng nhóm Abel trong trường hợp cụ thể chúng ta xây dựng bài toán tổng quát. Sử dụng phương pháp giải của bài toán tổng quát ta giải được các bài toán khó trong những trường hợp riêng.

__Ví dụ 1__: Với $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0,\ a \geq \alpha,\ ab \geq \alpha\beta,\ abc \geq \alpha\beta\gamma$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq \alpha + \beta + \gamma$$

Giải

Ta có

$$a + b + c = \gamma\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) + \left(\beta - \gamma\right)\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) + \left(\alpha - \beta\right)\frac{a}{\alpha}$$

$$\geq 3\gamma\sqrt[3]{\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}} + 2\left(\beta - \gamma\right)\sqrt{\frac{ab}{\alpha\beta}} + \left(\alpha - \beta\right)\frac{a}{\alpha}$$

Áp dụng các điêu kiện đã cho của bài toán ta thu được

$$a+b+c \ge 3\gamma + 2(\beta-\gamma) + (\alpha-\beta) = \gamma+\alpha+\beta \text{ (đpcm)}$$

Áp dụng kết quả trên ta giải dễ dàng các bài tập sau:

<u>Ví dụ 2</u>: Với $\alpha \ge 3,\ ab \ge 6,\ abc \ge 6$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \ge 6.$$

Giải

Ta có

$$a+b+c = \left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)+\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)+\frac{a}{3}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{6}}+2\sqrt{\frac{ab}{6}}+\frac{a}{3} \ge 3+2+1=6$$

<u>Ví dụ 3</u>: Với $0<a\le b\le c\le 3,\ bc\le 6,\ abc\le 6,$ chứng minh rằng

$$a+b+c\le 6$$

Giải

Ta có

$$6=1+2+3=a\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)+(b-a)\left(\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)+(c-b)\frac{3}{c}$$

Suy ra

$$6\ge 3a\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}+2(b-a)\sqrt{\frac{6}{bc}}+(c-b).\frac{3}{c}$$

$$\Leftrightarrow 6\ge 3a+2(b-a)+(c-b)=a+b+c \text{ (đpcm)}$$

<u>Nhận xét</u>

Từ những ví dụ cụ thể ta xây dựng phương pháp giải cho những bất đẳng thức dạng này.

Bước 1. Xác định khi nào dấu bất đẳng thức xảy ra bằng cách chuyển các điều kiện đã cho thành đẳng thức

Bước 2. Viết lại đẳng thức cần chứng minh dưới dạng đối xứng 2 vế

Bước 3. Áp dụng phép nhóm Abel cho một vế của bất đẳng thức theo điều kiện thứ tự

Chúng ta trình bày bài giải mẫu sau:

<u>Ví dụ 4:</u> với a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiên

$a\ge b\ge 1,\ a\le 3,\ ab\le 6c$ chứng minh rằng

$$a+b-c\le 4$$

Giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết dưới dạng

$$a+b+1\le 3+2+c$$

Ta có

$$3+2+c=\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{c}{1}\right)+(b-1)\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\right)+(a-b)\frac{3}{2}$$

Suy ra

$$3+2+c\geq 3\sqrt[3]{\frac{6c}{ab}}+2(b-1)\sqrt{\frac{6}{ab}}+(a-b)\frac{3}{a}$$

Suy ra

$$3+2+c\geq 3+2(b-1)+(a-b)$$

$$\Leftrightarrow 3+2+c\geq a+b+1$$

Đối với một số dạng hệ quả của bất đẳng thức Cosi chúng ta cũng dễ dàng xây dựng được những bất đẳng thức tương tự trong trường hợp tổng quát và đặc biệt

Ví dụ 5. Với $\alpha\geq\beta\geq\gamma>0;\ a,b,c>0; c\leq\gamma;\ \frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\leq 2;\ \frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\leq 3$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

Giải

Ta có

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)\frac{\gamma}{c}$$

Sử dụng các điều kiện của bài toán ta thu được

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=\frac{1}{\frac{a}{\beta}}+\frac{1}{\frac{b}{\beta}}+\frac{1}{\frac{c}{\gamma}}\geq\frac{9}{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}\geq 3$$

Tương tự

$$\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\geq 2$$

Suy ra

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3.\frac{1}{\alpha}+2\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\geq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 6. với $a,b,c>0,\ \frac{b}{2}+c\leq 2,\ \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\leq 3,\ c\leq 1$ Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{11}{6}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{c}$$
$$\geq\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{\frac{b}{2}+c}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{c}$$
$$\geq\frac{1}{3}\cdot 3+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{11}{6}$$

<u>Ví dụ 7</u>: Với $a\geq b\geq c\geq 1,\ \frac{2}{b}+\frac{1}{c}\leq 2,\ \frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{11}{6}\cdot$$

Giải

Ta có:

$$\frac{11}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{a}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{b}{2}+c\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)c$$

$$\frac{11}{6}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\frac{3}{a}}+\frac{1}{\frac{2}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{\frac{2}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{c}}$$

Suy ra

$$\frac{11}{6}\geq\frac{1}{a}\cdot\frac{9}{\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}}+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{4}{\frac{2}{b}+\frac{1}{c}}+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{c}}$$
$$\geq 3\cdot\frac{1}{a}+2\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

(đpcm)

<u>Ví dụ 8</u>: Với

$a\geq b\geq 1\geq c>0,\ \frac{2}{b}+c\leq 2,\ \frac{3}{a}+\frac{2}{b}+c\leq 3$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\leq-\frac{1}{6}.$$

Giải

Bất dẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}$$

Ta có

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{c}\right)+\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1}{\frac{3}{a}}+\frac{1}{\frac{2}{b}}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{\frac{2}{b}}+\frac{1}{c}\right)+\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{c}$$

$$\geq\frac{1}{a}\cdot\frac{9}{\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}}+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{4}{\frac{2}{b}+c}+\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{c}$$

$$\geq 3\cdot\frac{1}{a}+2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\left(1-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1$$

(dpcm)

<u>Ví dụ 9</u>: với $0<\alpha\leq\beta\leq\gamma;$ a,b,c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\leq 3,\ \frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\leq 2,\ \frac{c}{\gamma}\leq 1,$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$$

Giải

Ta có

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\frac{a}{\alpha}}+\sqrt{\frac{b}{\beta}}+\sqrt{\frac{c}{\gamma}}\right)+\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{\beta}}+\sqrt{\frac{c}{\gamma}}\right)+\left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}\right)\sqrt{\frac{c}{\gamma}}$$

Suy ra

Xây dựng bất đẳng thức trong các trường hợp cụ thể của α,β,γ ta thu được

<u>Ví dụ 10</u> với $a,b,c>0$ thỏa mãn các điều kiện

$$a+\frac{b}{4}+\frac{c}{9}\leq 3,\ \frac{b}{4}+\frac{c}{9}\leq 2,\ \mathrm{c}\leq 9,$$

Chứng minh rằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq 6$

Giải

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{b}{4}}+\sqrt{\frac{c}{9}}\right)+(2-1)\left(\sqrt{\frac{b}{4}}+\sqrt{\frac{c}{9}}\right)+(3-2)\sqrt{\frac{c}{9}}$$

$$\leq 3\sqrt{\frac{a+\frac{b}{4}+\frac{c}{9}}{3}}+2(2-1)\cdot\sqrt{\frac{\frac{b}{4}+\frac{c}{9}}{2}}+(3-2)\sqrt{\frac{c}{9}}$$

$$\leq 3+2+1=6$$

(Đpcm)

Ví dụ 11: với $0<a\le b\le c,\ \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\le 3,\ \frac{4}{b}+\frac{9}{c}\le,\ \frac{9}{c}\le 1$ chứng minh rằng

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge 6.$$

Giải

Ta có

$$6=\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{a}.\left(\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{4}{b}}+\sqrt{\frac{9}{c}}\right)+\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{b}}+\sqrt{\frac{9}{c}}\right)+\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{\frac{9}{c}}$$

Suy ra

$$6\le 3\sqrt{a}\sqrt{\frac{\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}}{3}}+2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right).\sqrt{\frac{\frac{4}{b}+\frac{9}{c}}{2}}+\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{\frac{9}{c}}$$

$$\le 3\sqrt{a}+2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)+\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

(đpcm)

Ví dụ 12 với $0<a\le b\le c,\ a+\frac{b}{4}+\frac{c}{9}\le 3,\ \frac{b}{4}+\frac{9}{c}\le 2,\ \frac{9}{c}\le 1$, chứng minh rằng

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\le 0.$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{9}\le\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{c}$$

Ta có:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{9}=1\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{b}{4}}+\sqrt{\frac{9}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{b}{4}}+\sqrt{\frac{9}{c}}\right)+\left(\sqrt{c}-2\right)\sqrt{\frac{9}{c}}$$

$$\le 3\sqrt{\frac{a+\frac{b}{4}+\frac{9}{c}}{3}}+2\sqrt{\frac{\frac{b}{4}+\frac{9}{c}}{2}}+\left(\sqrt{c}-2\right)\sqrt{\frac{9}{c}}$$

$$\le 3+2+\sqrt{c}-2=3+\sqrt{c}.$$

Suy ra: $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\le 0$ đpcm

Ví dụ 13: với $0<\alpha\le\beta\le\gamma$; a,b,c>0 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\ge 3,\ \frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\ge 2,\ \frac{c}{\gamma}\ge 1,$$

Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Giải

Ta có

$$a^2+b^2+c^2 \ge \alpha^2\left(\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{b}{\beta}\right)^2+\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2\right)+\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(\left(\frac{b}{\beta}\right)^2+\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2\right)+\left(\gamma^2-\beta^2\right)\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2$$

Suy ra:

$$a^2+b^2+c^2 \ge 3\alpha^2\left(\frac{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}{3}\right)^2+2\left(\beta^2-\alpha^2\right)\cdot\left(\frac{\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}{2}\right)^2+\left(\gamma^2-\beta^2\right)\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2$$

$$\ge 3\alpha^2+2\left(\beta^2-\alpha^2\right)+\left(\gamma^2-\beta^2\right)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2. \text{(đpcm)}$$

Với α,β,γ cụ thể ta thu được

<u>Ví dụ 14</u>: Với $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện

$$a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\ge 3,\ \frac{b}{2}+\frac{c}{3}\ge 2,\ \mathrm{c}\ge 3,$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\le 14$.

Gải

Ta có:

$$a^2+b^2+c^2=\left(a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2\right)+\left(2^2-1^2\right)\cdot\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2\right)+\left(3^2-2^2\right)\left(\frac{c}{3}\right)^2$$

Suy ra:

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\left(\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}}{3}\right)^2+2\cdot 3\cdot\left(\frac{\frac{b}{2}+\frac{c}{3}}{2}\right)^2+\left(3^2-2^2\right)\left(\frac{c}{3}\right)^2$$

$$\ge 3+2\cdot 3+3^2-2^2=14.$$

<u>Ví dụ 15</u>: với $0<a\le b\le c$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3,\ \frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 2,\ \frac{3}{c}\ge 1,$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\le 14$.

Giải

Ta có:

$$14=1^2+2^2+3^2=a^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}\right)+\left(b^2-a^2\right)\left(\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}\right)+\left(c^2-b^2\right)\frac{9}{c^2}$$

Suy ra

$$14 \ge 3a^2\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}}{3}\right)^2+2\left(b^2-a^2\right)\left(\frac{\frac{2}{b}+\frac{3}{c}}{2}\right)^2+\left(c^2-b^2\right)\cdot\frac{9}{c^2}$$

$$14 \ge 3a^2+2\left(b^2-a^2\right)+\left(c^2-b^2\right)=a^2+b^2+c^2$$

(đpcm)

<u>Ví dụ 16</u>: với $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện

$$c\ge 2,\ \text{a}+\frac{b}{2}+\frac{3}{c}\ge 3,\ \frac{b}{2}+\frac{3}{c}\ge 2,\ \frac{3}{c}\ge 1,$$

Chứng minh rằng

$$c^2-a^2-b^2\le 4$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^2+b^2+9\ge 1^2+2^2+c^2$$

Ta có:

$$a^2+b^2+3^2=\left(a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{c}\right)^2\right)+\left(2^2-1^2\right)\cdot\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{c}\right)^2\right)+\left(c^2-2^2\right)\left(\frac{3}{c}\right)^2$$

Suy ra

$$a^2+b^2+3^2\ge 3\left(\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{3}{c}}{3}\right)^2+2\cdot 3\cdot\left(\frac{\frac{b}{2}+\frac{3}{c}}{2}\right)^2+\left(c^2-2^2\right)\cdot\left(\frac{3}{c}\right)^2$$

$$\ge 3+6+\left(c^2-2^2\right)\Leftrightarrow c^2-a^2-b^2\le 4$$

Nhận xét:

Ví dụ số 1,9,13 là các ví dụ tiêu biểu và tổng quát cho các bài toán còn lại.

Các ví dụ trên không còn tính đối xứng.

Thay các hằng số α,β,γ khác nhau ta thu được các bất đẳng thức đa dạng

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1.Với

$$x_i\in R^+\left(i=1,n\right);\ 0<\text{y}_1\le y_2\le\ldots\le y_n;\ x_1x_2\ldots x_n\ge y_1y_2\ldots y_n;\ x_2x_3\ldots x_n\ge y_2y_3\ldots y_n;\ \ldots;\ x_n\ge y_n$$

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n}x_i\ge\sum_{i=1}^{n}y_i$

*Hưỡng dẫn : $$\sum_{i=1}^{n}x_i=y_1.\sum_{i=1}^{n}\cdot\frac{x_i}{y_i}+\left(y_2-y_1\right)\sum_{i=2}^{n}\frac{x_i}{y_i}+\ldots+\left(y_n-y_{n-1}\right)\frac{x_n}{y_n}$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ge ny_1\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}\right)^{\frac{1}{n}} + (n-1)(y_2 - y_i)\left(\prod_{i=2}^{n}\frac{x_i}{y_i}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \ldots + y_n - y_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \ge ny_1 + (n-1)(y_2 - y_1) + (n-2)(y_3 - y_2) + \ldots\ldots + y_n - y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} y_i \text{ (đpcm)}$$

2. Với $a,b,c>0$ thỏa mãn các điều kiện

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\ge 3;\ \frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\ge 2;\ \frac{c}{\gamma}\ge 1;\ 0<\alpha\le\beta\le\gamma$$

Chứng minh rằng $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}^*$ thì

$$a^n+b^n+c^n \ge \alpha^n+\beta^n+\gamma^n.$$

*Hướng Dẫn:

$$a^n+b^n+c^n=\alpha^n\left[\left(\frac{a}{\alpha}\right)^n+\left(\frac{b}{\beta}\right)^n+\left(\frac{c}{\gamma}\right)^n\right]+\left(\beta^n-\alpha^n\right)\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)^n+\left(\frac{c}{\gamma}\right)^n\right]+\left(\gamma^n-\beta^n\right)\left(\frac{c}{\gamma}\right)^n$$

Suy ra

$$a^n+b^n+c^n \ge 3\alpha^n.\left[\frac{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}{3}\right]^n+2\left(\beta^n-\alpha^n\right)\left[\frac{\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}{3}\right]^n+\left(\gamma^n-\beta^n\right)\left(\frac{c}{\gamma}\right)^n$$

$$\ge 3\alpha^n+2\left(\beta^n-\alpha^n\right)+\left(\gamma^n-\beta^n\right)=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n.$$

3.Với $a,b,c>0$ thỏa mãn các điều kiện

$$a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\ge 3;\ \frac{b}{2}+\frac{c}{3}\ge 3;\ \frac{c}{3}\ge 3$$

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3\ge 36$.

*Hướng dẫn

Ứng dụng kết quả của bài tập 2 với $\alpha=1,\ \beta=2;\ \gamma=3$

4. Với $0<a\le b\le c$ là các số thực dương thỏa mãn các điều kiện

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 3;\ \frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge 2;\ \frac{3}{c}\ge 1$$

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3\le 36$

Hướng dẫn ứng dụng kết quả của bài tập 2 với

$a=1,$ b = 2; c = 3, $\alpha=1;$ β = 2; γ = 3.

5. Với $0<\alpha\le\beta\le\gamma$ và $a,b,c>0$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\le 3;\ \frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\le 2;\ \frac{c}{\gamma}\le 1$$

Chứng minh rằng

$$P=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\le\sqrt[n]{\alpha}+\sqrt[n]{\beta}+\sqrt[n]{\gamma}$$

*Hướng dẫn

Ta có

$$p=\sqrt[n]{\alpha}\left(\sqrt[n]{\frac{a}{\alpha}}+\sqrt[n]{\frac{b}{\beta}}+\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}\right)+\left(\sqrt[n]{\beta}-\sqrt[n]{\alpha}\right)\left(\sqrt[n]{\frac{b}{\beta}}+\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}\right)+\left(\sqrt[n]{\gamma}-\sqrt[n]{\beta}\right)\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}$$

Suy ra

$$p\le 3\sqrt[n]{\alpha}\sqrt[n]{\frac{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}{3}}+2\left(\sqrt[n]{\beta}-\sqrt[n]{\alpha}\right)\sqrt[n]{\frac{\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}{2}}+\left(\sqrt[n]{\gamma}-\sqrt[n]{\beta}\right)\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}$$

f(đpcm)

6.Với $\alpha\ge\beta\ge\gamma>0$ và $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\le 3;\ \frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\le 2,\ \frac{c}{\gamma}\le 1$$

Chứng minh rằng

$$p=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b}}+\frac{1}{\sqrt[n]{c}}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}+\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}$$

*Hướng dẫn

Ta có

$$P=\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{a}{\alpha}}}+\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{b}{\beta}}}+\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}-\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{b}{\beta}}}+\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}-\frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}\right)\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}}$$

Suy ra

$$P\ge 3\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{\frac{a}{\alpha}}+\sqrt[n]{\frac{b}{\beta}}+\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}}{3}}+2\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}-\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}\right)\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{\frac{b}{\beta}}+\sqrt[n]{\frac{c}{\gamma}}}{2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}-\frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow P \ge 3\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}{3}}}+2\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}-\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}\right)\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}}{2}}}+\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}-\frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}$$

7.Với $\alpha \ge \beta \ge \gamma > 0;$ a,b,c>0; $\frac{1}{c\gamma} \le 1;\ \frac{1}{b\beta}+\frac{1}{c\gamma} \le 2;\ \frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{b\beta}+\frac{1}{c\gamma} \le 3$

Chứng minh rằng $a+b+c \ge \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$

*Hướng dẫn

Ta có:

$$\left(a+b+c\right)=\frac{1}{\alpha}\left(\alpha a+\beta b+\gamma c\right)+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta b+\gamma c\right)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)\gamma c$$

Ta có $\alpha a+\beta b+\gamma c=\frac{1}{\frac{1}{\alpha a}}+\frac{1}{\frac{1}{\beta b}}+\frac{1}{\frac{1}{\gamma c}} \ge \frac{9}{\frac{1}{\alpha a}+\frac{1}{\beta b}+\frac{1}{\gamma c}} \ge \frac{9}{3}=3$

$$\beta b+\gamma c=\frac{1}{\frac{1}{b\beta}}+\frac{1}{\frac{1}{c\gamma}} \ge \frac{4}{\frac{1}{b\beta}+\frac{1}{c\gamma}} \ge \frac{4}{2}=2$$

Suy ra

$$\left(a+b+c\right) \ge 3\frac{1}{\alpha}+2\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\text{(đpcm)}$$

Những bài tập sau là các trường hợp đặc biệt với α,β,γ cụ thể

8. Với $a,b,c>0;$ c ≥ 1; $\frac{1}{2b}+\frac{1}{c} \le 2;\ \frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c} \le 3.$

Chứng minh rằng

$$a+b+c \ge \frac{11}{6}$$

*Hướng dẫn

$$\left(a+b+c\right)=\frac{1}{3}\left(3a+2b+c\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(2b+c\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)c$$

Ta có: $3a+2b+c=\dfrac{1}{\frac{1}{3a}}+\dfrac{1}{\frac{1}{2b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}} \ge \dfrac{9}{\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}} \ge \dfrac{9}{3}=3,$

$$2b+c=\frac{1}{\frac{1}{2b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}} \ge \frac{4}{\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}} \ge \frac{4}{2}=2$$

Suy ra

$$a+b+c \geq \frac{1}{3}\cdot 3+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$$

9. Với $a,b,c>0$ thỏa mãn $c\geq 1;\ \frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\leq 2;\ \frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 6$$

*Hướng dẫn

$$6=(3+2+1)=\frac{1}{a}(3a+2b+c)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)(2b+c)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)c$$

Ta có

$$3a+2b+c=\frac{1}{\frac{1}{3a}}+\frac{1}{\frac{1}{2b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}\geq \frac{9}{\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}}\geq \frac{9}{3}=3,$$

$$2b+c=\frac{1}{\frac{1}{2b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}}\geq \frac{4}{\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}}\geq \frac{4}{2}=2$$

Thu được

$$6\geq \frac{3}{a}+2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\text{(đpcm)}$$

10 với $a,b,c>0$ thỏa mãn $c\geq 1;\ \frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\leq 2;\ \frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\leq 3.$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-b\leq \frac{7}{2}.$$

*Hướng dẫn

Ta có $3+b+1=\frac{1}{a}(3a+b+c)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\right)(2b+c)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)\cdot c$

$$\Leftrightarrow 3+b+1\geq 3\cdot\frac{1}{a}+2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{c}-b\leq \frac{7}{2}\text{(đpcm)}$$

11. Với $0<\alpha\leq\beta\leq\gamma;$ a,b,c>0; $\frac{1}{c\gamma}\leq 1;\ \frac{1}{\beta b}+\frac{1}{c\gamma}\leq 2;$

$\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{b\beta}+\frac{1}{c\gamma}\leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\leq\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$$

Hướng dẫn

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha a}}+\frac{1}{\sqrt{\beta b}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma c}}\right)+$$

$$+\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\beta b}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma c}}\right)+\left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma c}}\right)$$

Ta có $$\frac{1}{\sqrt{\alpha a}}+\frac{1}{\sqrt{\beta b}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma c}}\le 3\sqrt{\frac{\frac{1}{\alpha a}+\frac{1}{\beta b}+\frac{1}{\gamma c}}{3}}\le 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta b}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma c}}\le 2\sqrt{\frac{\frac{1}{\beta b}+\frac{1}{\gamma c}}{2}}\le 2$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\le 3\sqrt{\alpha}+2\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)+\left(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}\right)\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$$

Những bài tập sau là các trường hợp đặc biệt khi α,β,γ cho các gía trị cụ thể

12. với $a,b,c>0;\ \frac{1}{9c}\le 1;\ \frac{1}{4b}+\frac{1}{9c}\le 2;\ \frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{9c}\le 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\le 6$$

*Hướng dẫn

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{4b}}+\frac{1}{\sqrt{9c}}\right)+\left(2-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4b}}+\frac{1}{\sqrt{9c}}\right)+\left(3-2\right)\frac{1}{\sqrt{9c}}$$

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{4b}}+\frac{1}{\sqrt{9c}}\le 3\sqrt{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{9c}}{3}}\le 3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{4b}}+\frac{1}{\sqrt{9c}}\le 2\sqrt{\frac{\frac{1}{4b}+\frac{1}{9c}}{2}}\le 2$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\le 3+2\left(2-1\right)+1=6\,(\text{đpcm})$$

13. Với $a\ge b\ge c>0;\ \frac{1}{9a}\le 1;\ \frac{1}{4b}+\frac{1}{9a}\le 2;\ \frac{1}{9a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{c}\le 3$ chứng minh rằng

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge\frac{11}{6}$$

*Hướng dẫn

$$\frac{11}{6}=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}\right)=\sqrt{c}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{4b}}+\frac{1}{\sqrt{9a}}\right)+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4b}}+\frac{1}{\sqrt{9a}}\right)+$$

$$+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{9a}}\le 3\sqrt{c}+2\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

14.Với $0<\alpha\le\beta\le\gamma$; a,b,c>0 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{b\beta}+\frac{1}{c\gamma}\ge 3;\ \frac{1}{b\beta}+\frac{1}{c\gamma}\ge 2;\ \frac{1}{c\gamma}\ge 1$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\alpha^2\left(\frac{1}{(a\alpha)^2}+\frac{1}{(b\beta)^2}+\frac{1}{(c\gamma)^2}\right)+$$

$$+\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(\frac{1}{(b\beta)^2}+\frac{1}{(c\gamma)^2}\right)+\left(\gamma^2-\beta^2\right)\cdot\frac{1}{(c\gamma)^2}$$

Ta có $\frac{1}{(a\alpha)^2}+\frac{1}{(b\beta)^2}+\frac{1}{(c\gamma)^2}\ge 3\left(\dfrac{\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{b\beta}+\frac{1}{c\gamma}}{3}\right)^2\ge 3$

$$\frac{1}{(b\beta)^2}+\frac{1}{(c\gamma)^2}\ge 2\left(\dfrac{\frac{1}{b\beta}+\frac{1}{c\gamma}}{2}\right)^2\ge 2$$

Thu được

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3\alpha^2+2\left(\beta^2-\alpha^2\right)+\left(\gamma^2-\beta^2\right)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\text{(đpcm)}$$

15. Với $a,b,c>0;\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\ge 3;\ \frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\ge 2;\ \frac{1}{3c}\ge 1$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 14$$

*Hướng dẫn

Ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(3c)^2}\right)+$$

$$+\left(2^2-1^2\right)\left(\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(3c)^2}\right)+\left(3^2-2^2\right)\cdot\frac{1}{(3c)^2}$$

Ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(3c)^2}\ge 3\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}}{3}\right)^2\ge 3,$$

$$\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(3c)^2}\ge 2\left(\frac{\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}}{2}\right)^2\ge 2.$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3+3\cdot 2+5=14\,\text{(đpcm)}$$

16. Với $0<a\le b\le c;\ \frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\ge 3;\ \frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\ge 2;\ \frac{1}{3c}\ge 1$

Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\le\frac{49}{36}$$

*Hướng dẫn

Ta có:

$$+\frac{49}{36}=1^2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}=a^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(3c)^2}\right)+$$

$$+\left(b^2-a^2\right)\left(\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(3c)^2}\right)+\left(c^2-b^2\right)\frac{1}{(3c)^2}$$

Ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(3c)^2}\geq 3\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}}{3}\right)^2\geq 3$$

$$\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(3c)^2}\geq 2\left(\frac{\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}}{3}\right)^2\geq 2$$

Suy ra

$$\frac{49}{36}\geq 3a^2+2\left(b^2-a^2\right)+\left(c^2-b^2\right)=a^2+b^2+c^2$$ (đpcm)

17 .Với $a\geq 3$, a+b ≥ 5, a+b+c ≥ 6. Chứng minh rằng

$a^2+b^2+c^2\geq 14$.

*Hướng dẫn

Ta có: $c^2=(c-1+1)^2=(c-1)^2+2(c-1)+1^1$,

$$b^2=(b-2+2)^2=(b-2)^2+4(b-2)+2^2$$

$$a^2=(a-3+3)^2=(a-3)^2+6(a-3)+3^2$$

Suy ra

$$a^2+b^2+c^2=(c-1)^2+(b-2)^2+(a-3)^2+$$
$$+2(a+b+c-6)+2(a+b-5)+2(a-3)+1^1+2^2+3^2$$

Suy ra

$$a^2+b^2+c^2\geq 1^2+2^2+3^2=14.$$

2.2.5.Dạng 4 Làm mạnh bất đẳng thức Cauchy

Xuất phát từ ý tưởng rất đơn giản: Nếu có $A\geq B$ thì ta thu được bất đẳng thức $\alpha A\geq B$ $(0\leq\alpha\leq 1)$ mạnh hơn tùy thuộc vào độ gần 1 của α. Chúng ta xây dựng một số bất đẳng thức mạnh hơn nhờ việc đưa tham số vào bất đẳng thức và các trường hợp đặc biệt của nó

Ví dụ 1: Với $0\leq\alpha,\beta,\gamma\leq 1$ chứng minh rằng

1, $a^2+b^2\geq 2ab+\alpha(a-b)^2$,

2, $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca+\frac{\alpha}{2}(a-b)^2+\frac{\beta}{2}(b-c)^2+\frac{\gamma}{2}(c-a)^2.(2.7.2)$

Giải

Ta có $(2.7.1)\Leftrightarrow(1-\alpha)(a-b)^2\geq 0$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức

$$a^2+b^2\ge 2ab+\alpha\left(a-b\right)^2,$$
$$b^2+c^2\ge 2bc+\beta\left(b-c\right)^2,$$
$$c^2+a^2\ge 2ca+\gamma\left(c-a\right)^2,$$

Ta thu được $\left(2.7.2\right)$.

<u>Ví dụ 2:</u> Với $a,b,c>0;\ 0\le\alpha,\beta,\gamma\le 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\left(a+b+c\right)+\frac{\alpha}{b}\left(a-b\right)^2+\frac{\beta}{c}\left(b-c\right)^2+\frac{\gamma}{c}\left(c-a\right)^2\left(2.7.3\right)$$

Giải

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a+\frac{a}{b}\left(a-b\right)^2,$$
$$\frac{b^2}{c}+c\ge 2b+\frac{\beta}{c}\left(b-c\right)^2,$$
$$\frac{c^2}{a}+a\ge 2c+\frac{\gamma}{a}\left(c-a\right)^2,$$

Ta thu được $\left(2.7.3\right)$

<u>Ví dụ 3:</u> Với m,n là các số tự nhiên, $a,b,c>0$ chứng minh rằng

$$a^{m+n}+b^{m+n}\ge\frac{1}{2}\left(a^m+b^m\right)\left(a^n+b^n\right)+\frac{\alpha}{2}\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)\left(2.7.4\right)$$

Trong đó $0\le\alpha\le 1$

Giải

Ta có $\left(2.7.4\right)\Leftrightarrow\left(1-\alpha\right)\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)\ge 0$ hiển nhiên đúng

<u>Ví dụ 4</u> Với $a,b>0;$ m, n là các số tự nhiên, chứng minh rằng

$$\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m+n}+\frac{\alpha}{4}\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right).\left(2.7.5\right)$$

Giải

Ta có

$$a^{m+n}+b^{m+n}\ge\frac{1}{2}\left(a^m+b^m\right)\left(a^n+b^n\right)+\frac{\alpha}{2}\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)$$

Suy ra

$$\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{m+n} + \frac{\alpha}{4}\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right) \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 5: Với $a,b>0;\ 0<\alpha<1$, chứng minh rằng

$$a^3+b^3 \ge ab\left(a+b\right)+\frac{2\alpha}{3}\left(a^2-b^2\right)\left(a-b\right)$$

Giải

Ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \frac{\alpha}{4}\left(a^2-b^2\right)\left(a-b\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3\right) \ge a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)+2\alpha$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3 \ge ab\left(a+b\right)+\frac{2\alpha}{3}\left(a^2-b^2\right)\left(a-b\right)$$

Ví dụ 6: Với $a,b,c>0;\ 0<\alpha,\beta,\gamma<1$ chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge ab+bc+ca+\frac{2\alpha}{3b}\left(a^2-b^2\right)\left(a-b\right)+$$
$$\frac{2\beta}{3c}\left(b^2-c^2\right)\left(b-c\right)+\frac{2\gamma}{3a}\left(c^2-a^2\right)\left(c-a\right)$$

Ta có

$$\frac{a^3}{b}+b^2 \ge a^2+ab+\frac{2\alpha}{3b}\left(a^2-b^2\right)\left(a-b\right) \text{ (áp dụng ví dụ 5)}$$

$$\frac{b^3}{c}+c^2 \ge b^2+bc+\frac{2\beta}{3c}\left(b^2-c^2\right)\left(b-c\right)$$

$$\frac{c^3}{a}+a^2 \ge c^2+ca+\frac{2\gamma}{3a}\left(c^2-a^2\right)\left(c-a\right)$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức (2.7.6)

Ví dụ 7 : Với $a,b,c>0;\ 0<\alpha,\beta,\gamma<1;$ m, n là các số tự nhiên chứng minh rằng

$$a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n} \ge \frac{1}{3}\left(a^m+b^m+c^m\right)\left(a^n+b^n+c^n\right)+\frac{\alpha}{3}\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)+$$
$$\frac{\beta}{3}\left(a^m-c^m\right)\left(a^n-c^n\right)+\frac{\gamma}{3}\left(b^m-c^m\right)\left(b^n-c^n\right) \quad (2.7.7)$$

Giải

Ta có:

$$\left(2.7.7\right) \Leftrightarrow \left(1-\alpha\right)\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)+\left(1-\beta\right)\left(a^m-c^m\right)\left(a^n-c^n\right)+$$
$$\left(1-\gamma\right)\left(b^m-c^m\right)\left(b^n-c^n\right) \geq 0$$

<u>Ví dụ 8.</u> Với $a,b,c>0;\ 0<\alpha,\beta,\gamma<1;$ m, n là các số tự nhiên chứng minh rằng

$$\frac{a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m+n} + \frac{\alpha}{9}\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right)+$$
$$+\frac{\beta}{9}\left(a^m-c^m\right)\left(a^n-c^n\right)\frac{\gamma}{9}\left(b^m-c^m\right)\left(b^n-c^n\right)\ \left(2.7.8\right)$$

Giải

$$\frac{a^m+b^m+c^m}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m,$$
$$\frac{a^n+b^n+c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

Nên bất đẳng thức $\left(2.7.8\right)$ suy trực tiếp từ (2.7.7)

<u>Ví dụ 9</u>: Với $a,b,c>0;\ 0 \leq \alpha,\beta,\gamma \leq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{\alpha}{b^2}(a-b)^2+\frac{\beta}{c^2}(b-c)^2+\frac{\gamma}{a^2}(c-a)^2 \quad \left(2.7.9\right)$$

Giải

Từ bất đẳng thức $a^2+b^2 \geq 2ab+\alpha\left(a-b\right)^2$ ta suy ra

$$\frac{a^2}{b^2}+1 \geq 2\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{\alpha}{b^2}(a-b)^2$$

Tương tự

$$\frac{b^2}{c^2}+1 \geq 2\left(\frac{b}{c}\right)+\frac{\beta}{c^2}(b-c)^2,$$
$$\frac{c^2}{a^2}+1 \geq 2\left(\frac{c}{a}\right)+\frac{\gamma}{a^2}(c-a)^2,$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$$

Cộng vế với vế của bốn đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức (2.7.9)

<u>Ví dụ 10</u>. Với $a,b,c>0;\ 0 \leq \alpha,\beta,\gamma \leq 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{2\alpha}{3b^2}\left(a^2-b^2\right)\left(a-b\right)+$$

$$+\frac{2\beta}{3c^2}\left(b^2-c^2\right)\left(b-c\right)+\frac{2\gamma}{3a^2}\left(c^2-a^2\right)\left(c-a\right)\quad(2.7.10)$$

Giải

Từ bất đẳng thức

$$a^3+b^3\ge ab\left(a+b\right)+\frac{2\alpha}{3}\left(a^2-b^2\right)\left(a-b\right)$$

Ta thu được

$$\frac{a^3}{b^2}+b\ge\frac{a^2}{b}+a+\frac{2\alpha}{3b^2}\left(a^2-b^2\right)\left(a-b\right),$$

$$\frac{b^3}{c^2}+c\ge\frac{b^2}{c}+b+\frac{2\beta}{3c^2}\left(b^2-c^2\right)\left(b-c\right)$$

$$\frac{c^3}{a^2}+a\ge\frac{c^2}{a}+c+\frac{2\gamma}{3a^2}\left(c^2-a^2\right)\left(c-a\right)$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức (2.7.10)

<u>Ví dụ 11</u>. với a,b>0; $0\le\alpha\le1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4-8\alpha}{a+b}+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}}$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}}+\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$$

$$a+b\ge2\sqrt{ab}+\alpha\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

Nhân hai bất đẳng thức trên ta thu được

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(a+b\right)\ge4+\frac{2\alpha}{\sqrt{ab}}.\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+$$

$$+2\alpha\sqrt{ab}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\alpha^2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

Suy ra

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(a+b\right)\ge4+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}}.\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=4+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)$$

$$\ge 4\text{ - }8\alpha+\frac{4\alpha\left(a+b\right)}{\sqrt{ab}}$$

Thu được

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4-8\alpha}{a+b}+\frac{4\alpha}{\sqrt{ab}} \text{ (đpcm)}$$

2. Các trường hợp đăc biệt

Sử dụng kết quả ví dụ 1 ta thu được

Ví dụ 12 với $1\ge a,b,c>0$ chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca+\frac{1}{3}(a-b)^2+\frac{1}{4}(b-c)^2+\frac{1}{5}(c-a)^2.$$

*Hướng dẫn

Sử dụng ví dụ 1 với $\alpha=\frac{2}{3},\beta=\frac{1}{2},\gamma=\frac{2}{5}.$

Ví dụ 13. Với $1\ge a,b,c>0,$ a,b,c>0, chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca+\frac{a(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{b(b-c)^2}{2(b+c)}+\frac{c(c-a)^2}{2(c+a)}$$

*Hướng dẫn

Chọn $\alpha=\frac{a}{a+b};\ \beta=\frac{b}{b+c};\ \gamma=\frac{c}{c+a}$ và sử dụng kết quả của ví dụ 1.

Ví dụ 14. Với, $a,b,c>0;$ a + b + c = 1chứng minh rằng

$$6(ab+bc+ca)+a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2\le 2$$

Giải

Vì $a,b,c>0;$ a + b + c = 1ta suy ra $0<a,b,c<1$, sử dụng kết quả của ví dụ 1 với

$\alpha=a,\ \beta=$ b, $\gamma=$ c thu được

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca+\frac{a(a-b)^2}{2}+\frac{b(b-c)^2}{2}+\frac{c(c-a)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1=(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)+\frac{a(a-b)^2}{2}+\frac{b(b-c)^2}{2}+\frac{c(c-a)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\ge 6(ab+bc+ca)+a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2 \text{ (đpcm)}$$

3.Khả năng áp dụng của giải pháp

Sáng kiến đã được vận dụng cho các em học sinh chuyên toán 10 trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, các em học sinh trong đội tuyển thi học sinh giỏi quốc gia môn toán và các em học sinh ôn thi THPT quốc gia.

Khi giảng dạy về nội dung này các em học sinh tỏ ra thich thú, thích được khám phá và tự tin hơn khi làm bài tập về bất đẳng thức. Sáng kiến kinh nghiệm cũng được các thầy cô trong tổ Toán-Tin trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn vận dụng trong chuyên đề đổi mới dạy học.

4. Hiệu quả, lợi ích thu được

Từ nhận thức của bản thân trên cơ sở thực tiễn chọn đề tài và các biện pháp triển khai đề tài, qua khảo sát thực tế việc tiếp thu của học sinh, tôi thấy đã đạt được một số kết quả cụ thể như sau:

a.Với việc trình bày các bài tóan cơ bản, cùng với các ví dụ minh họa ngay sau đó, sẽ giúp tăng cường bài giảng cho các thầy , cô giáo và với các em học sinh sẽ dễ hiểu và biết cách trình bày bài, học sinh biết vận dụng thành thạo các kiến thức đã học làm cơ sở cho việc tiếp thu bài mới một cách thuận lợi, vững chắc.

b.Luyện tập cho học sinh thói quen suy nghĩ, quan sát, lập luận để học sinh phát huy trí thông minh, óc sáng tạo, khả năng phân tích, tổng hợp, tư duy độc lập và thông qua việc thảo luận, tranh luận mà học sinh phát triển khả năng nói lưu loát, biết lí luận chặt chẽ khi giải toán.

c. Học sinh biết vận dụng các kiến thức đơn lẻ để giải các bài toán tổng hợp nhiều kiến thức.Kiến thức về phép nhóm Abel, làm mạnh bất đẳng thức Cauchy giúp các em học sinh có nhiều cách nhìn đa dạng hơn để chứng minh bất đẳng thức Cauchyđ.

d.Ngoài ra có rất nhiều bài toán được giải nhiều cách khác nhau sẽ giúp các em học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.

e.Với phong cách trình bày như vậy, bộ tài liệu này còn nhằm giúp cho các em học sinh rèn luyện năng lực vận dụng lý thuyết được học .Tạo không khí sôi nổi, niềm say mê hứng thú cho học sinh bằng các bài toán sinh động, hấp dẫn thực sự biến giờ học, lớp học luôn là không gian toán học cho học sinh.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu sách hiện nay để vừa viết, vừa mang đi giảng dạy ngay cho các em học sinh của mình từ đó kiểm nghiệm và bổ sung thiếu sót, cùng với việc tiếp thu có chọn lọc ý kiến của các bạn đồng nghiệp để dần hoàn thiện bộ tài liệu này, nhưng khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những đóng góp quý báu của quý thầy giáo, cô giáo, các bạn đồng nghiệp và các bạn đọc gần xa.

5. Đánh giá về phạm vi ảnh hưởng của sáng kiến:

- Sáng kiến này đã được áp dụng cho học sinh lớp 10 ở trường THPT chuyên Lê Quý Đôn. Có thể dùng làm tài liệu bổ ích cho học sinh và giáo viên đặc biệt đối với học sinh ôn thi học sinh giỏi các cấp.

- Sáng kiến này cũng có thể làm tài liệu để cùng trao đổi và nghiên cứu với đồng nghiệp.

6. Kiến nghị, đề xuất: Với hướng nghiên cứu của sáng kiến tôi rất mong được sự quan tâm chia sẻ của các thầy cô để sang kiến có thể hoàn thiện hơn, đồng thời mong muốn đây sẽ là tài liệu bổ ích có thể nhân rộng tới các thầy cô giáo trong toàn tỉnh./.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G.Polya - *Sáng tạo toán học*, NXB Giáo Dục – 1997

2. Hoàng Chúng (1997), *Phương pháp dạy học môn toán ở trường THP*, NXB Giáo Dục.

3. Nguyễn hải Châu, Nguyễn Thế Thạch, *Kiểm tra đánh giá thường xuyên và định kỳ môn toán lớp 10* (2008), NXB Giáo Dục.

4. Nguyến Vĩnh Cận, Lê Thống Nhất, Phan Thanh Quang (1997), *Sai lầm phổ biến khi giải toán*, NXB Giáo Dục .

5. *Sách giáo khoa và sách Bài tập cơ bản đại số 10*, NXB Giáo Dục – 2006.

6. *Sách giáo khoa và sách Bài tập đại sốnâng cao 10*, NXB Giáo Dục – 2006.

7. *Tài liệu tập huấn chuyên toán đại số 10,*. NXB Giáo Dục – 2007.

8.Trần Phương, Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học,NXB tri thức- 2012.

9. *Bài báo trên internet, Tạp chí Toán học tuổi trẻ.*